ムケテ、未来。

CEDEC 2008

CESA DEVELOPERS CONFERENCE 2008

FOR NEXT 10 YEARS

3次元ローテーションの形

(株)バンダイナムコゲームス

コンテンツ制作本部

制作統括ディビジョン

技術部　技術サポート課

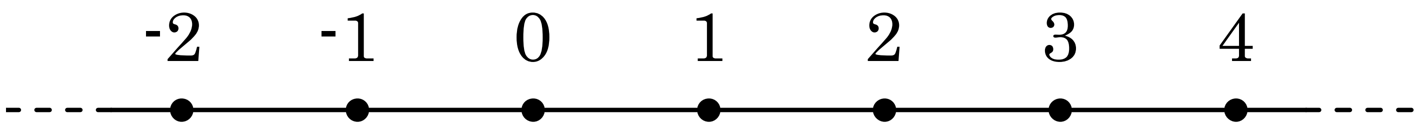
山口兼太郎

Kentaro_Yamaguchi@bandainamcogames.co.jp

BANDAI NAMCO Games

数直線

実数 $x \ (-\infty < x < \infty) \Leftrightarrow$ 直線



- 1対1の対応
- 連続的

直線: 曲がっていても直線

トポロジー(位相幾何学)

ある図形を…

曲げる，伸縮させる ⇒ 元と同じ形

切る，繋ぐ ⇒ 元と違う形

例: 鉄道の路線図

トポロジー的に同じ形 = 同相，位相同型

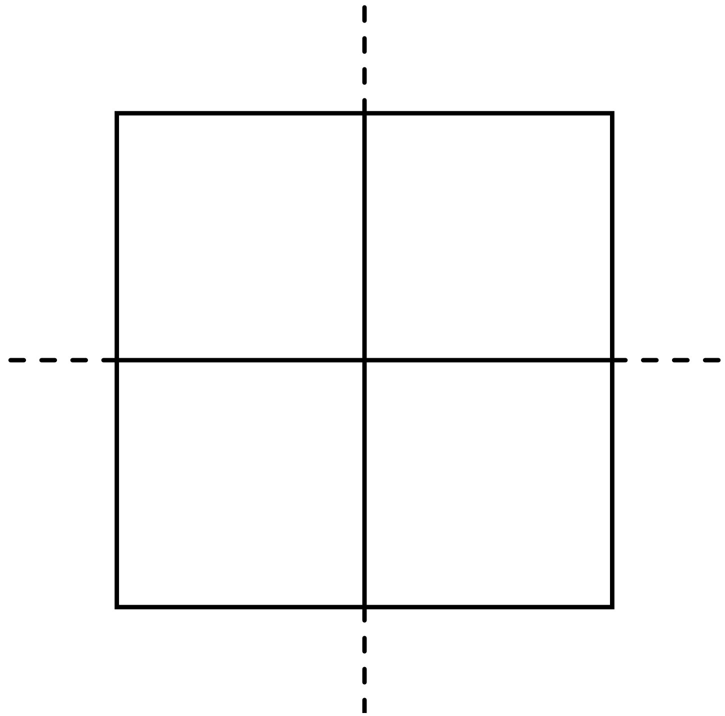
直線 = 直線と同相な図形

図形との対応

実数 $x\ (-\infty < x < \infty) \Leftrightarrow$ 直線

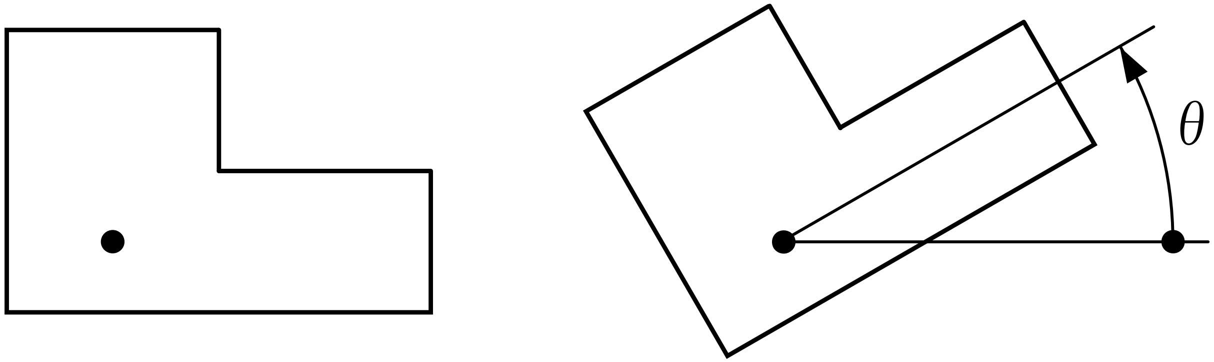
実数 $x\ (-1 <= x <= 1) \Leftrightarrow$ 線分

実数 2個$(x, y) \Leftrightarrow$ 平面



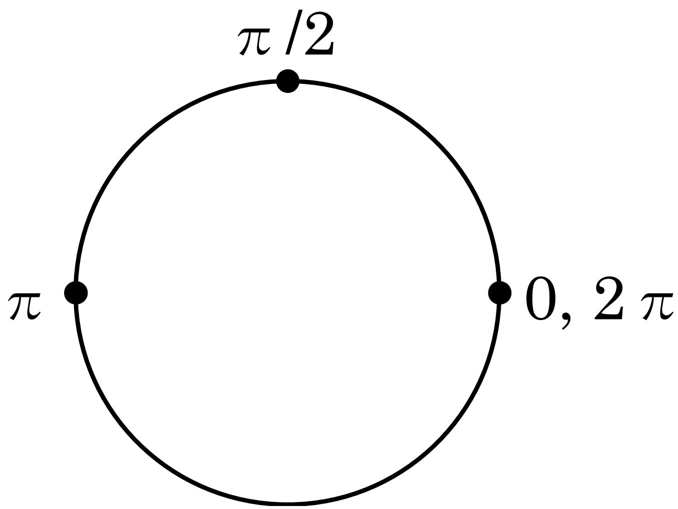
2次元回転

2次元回転 θ



$\theta = 2\pi$ と $\theta = 0$ は同じ

2次元回転 ⇔ 円



図形を表す記号

R^1 = 直線
R^2 = 平面
R^3 = 空間(通常の)

D^1 = 線分
D^2 = 円板
D^3 = 球

S^1 = 円(円周)
S^2 = 球の表面
S^3 = 4次元球の表面(超表面)

実射影空間

3次元回転 ⇔ 実射影空間(RP^3)

実射影空間(じつ･しゃえいくうかん)

図形の名称(トポロジーの観点による分類)

(注意: 射影に使う空間のことではない)

図形の名称

トポロジーによる分類: メビウスの帯(メビウスの輪)

トポロジー以外の分類: 正方形

実射影空間

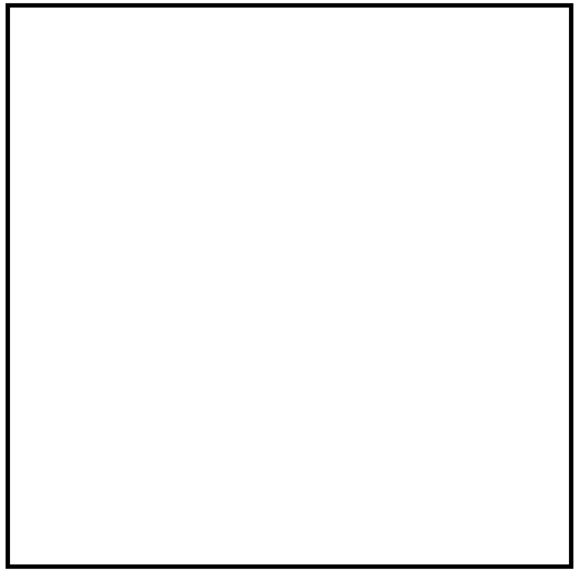
実射影空間(RP^3)とは，どんな図形?

その前に，簡単な図形から･･･

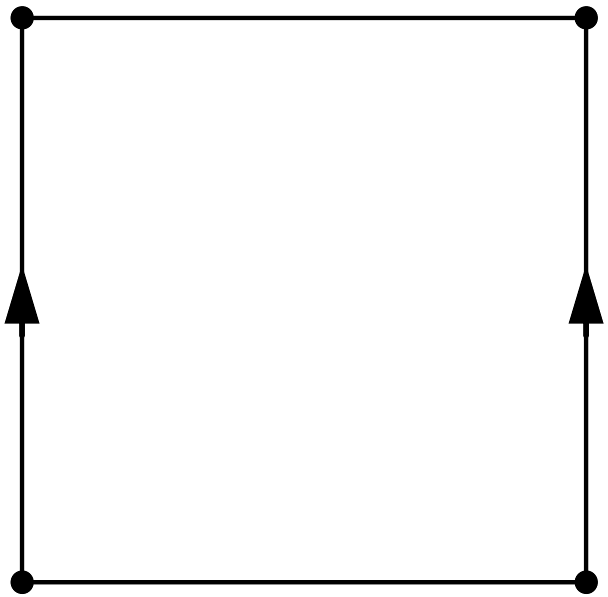
図形を作ってみよう

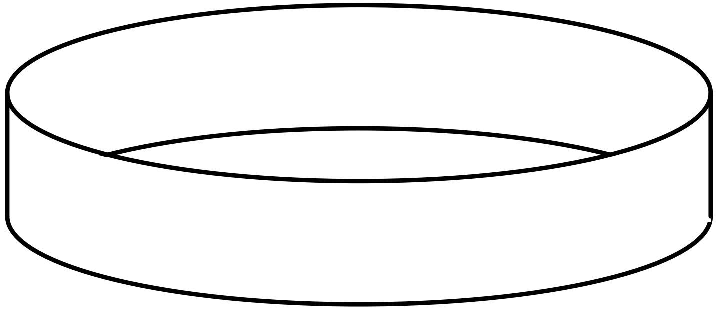
板の縁を同一視して図形を作る

同一視 = くっつける

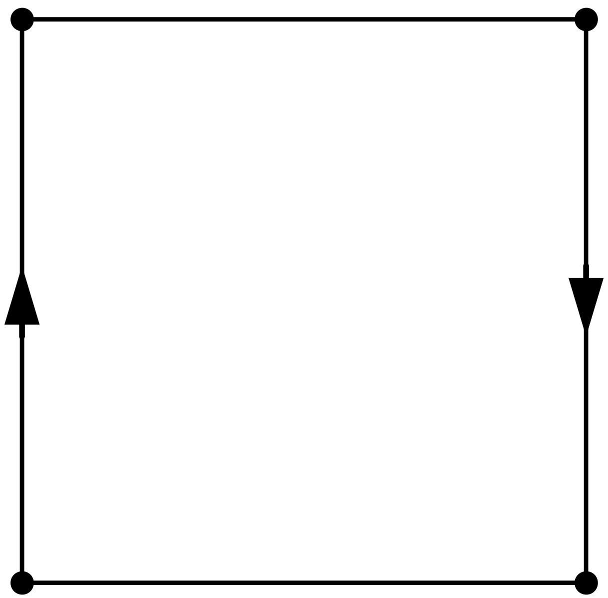


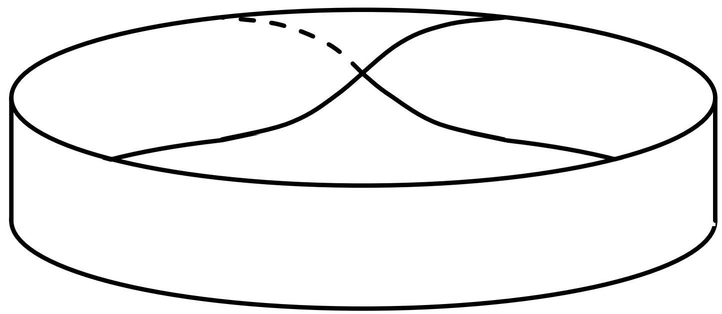
円筒



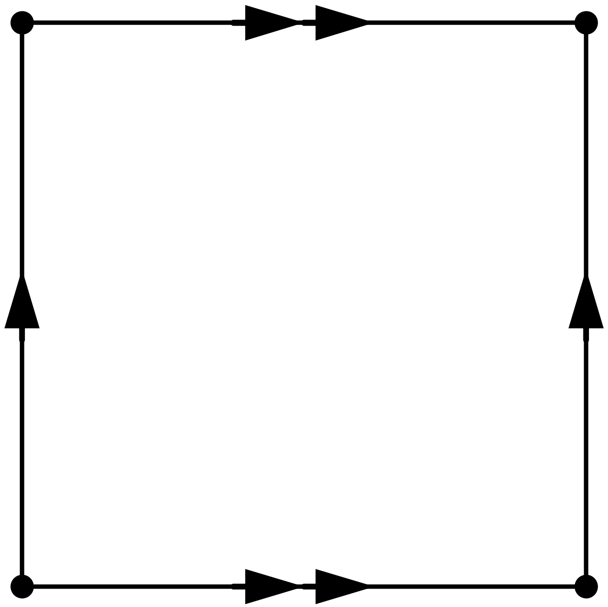


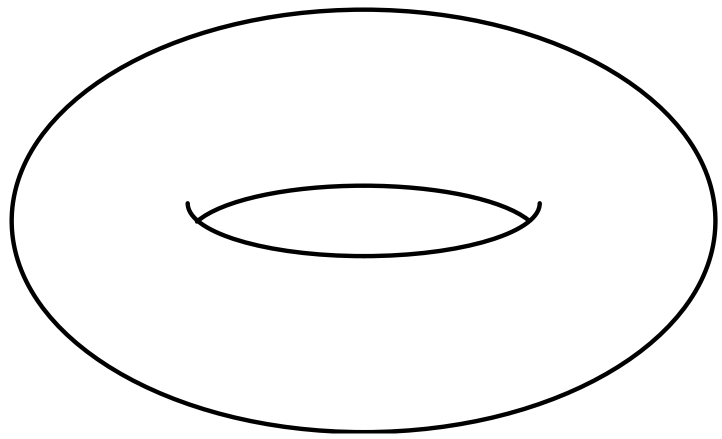
メビウスの帯



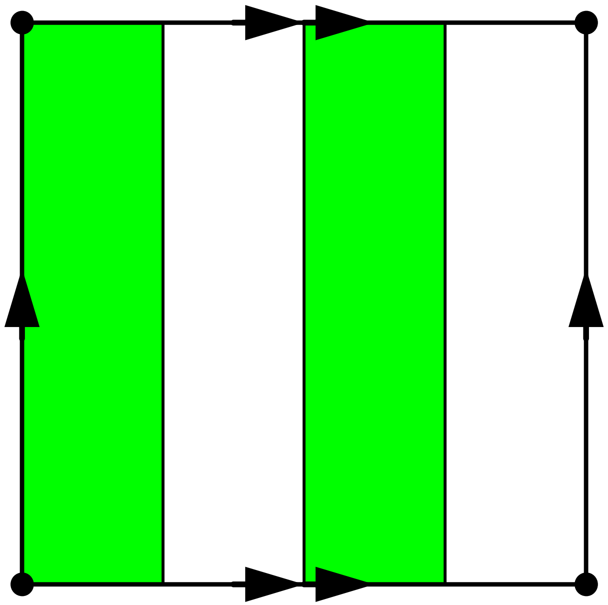


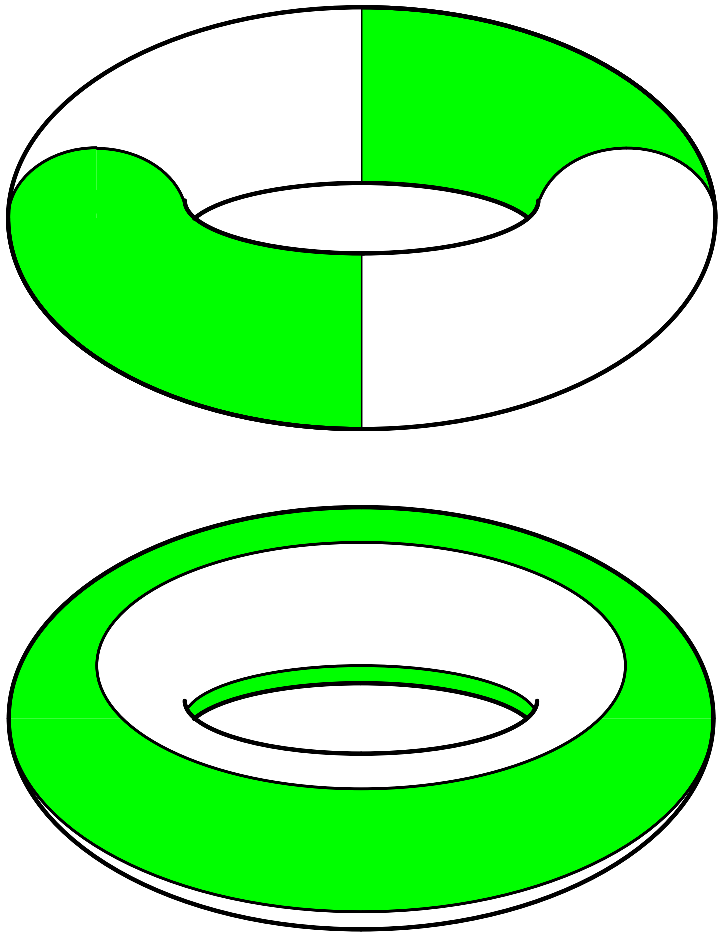
トーラス





トーラス

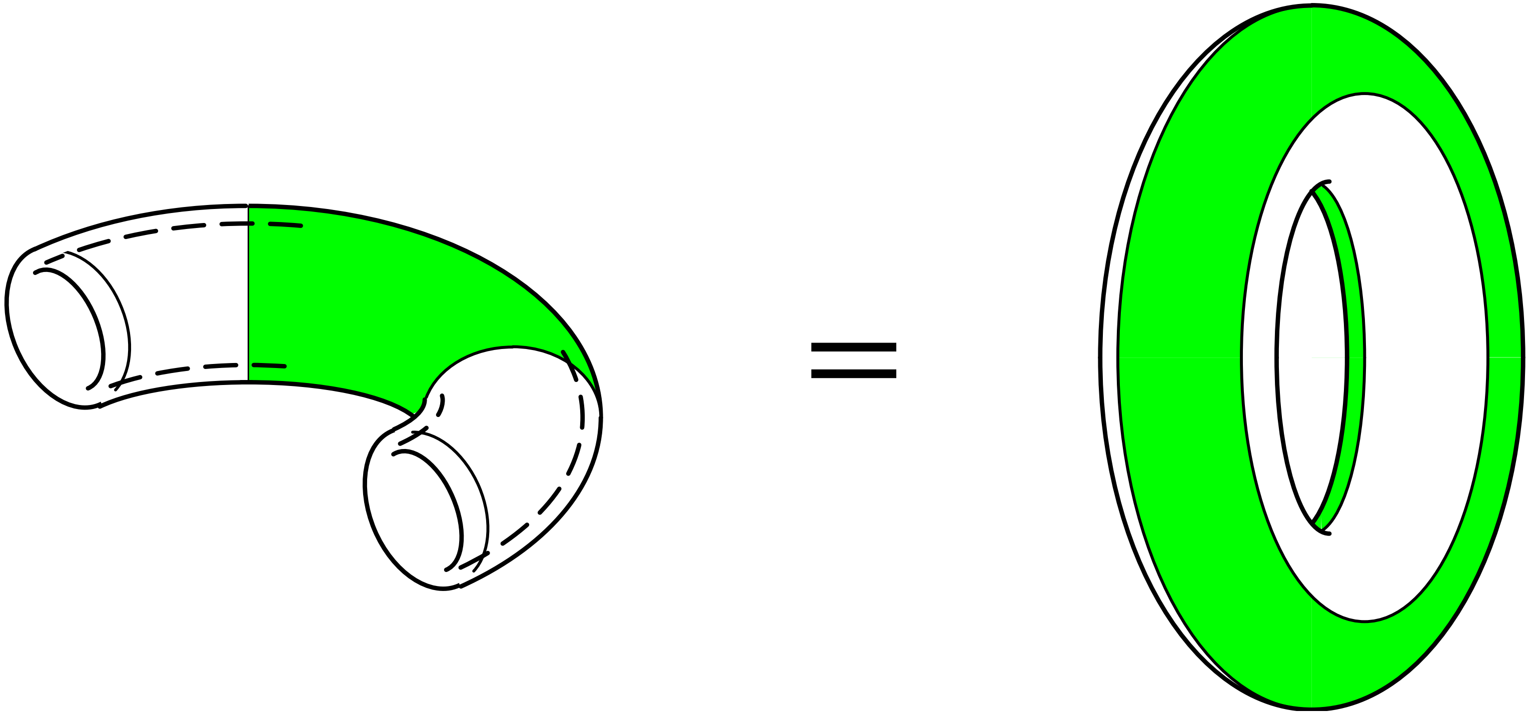




2種類あるのか?

トーラスを裏返す

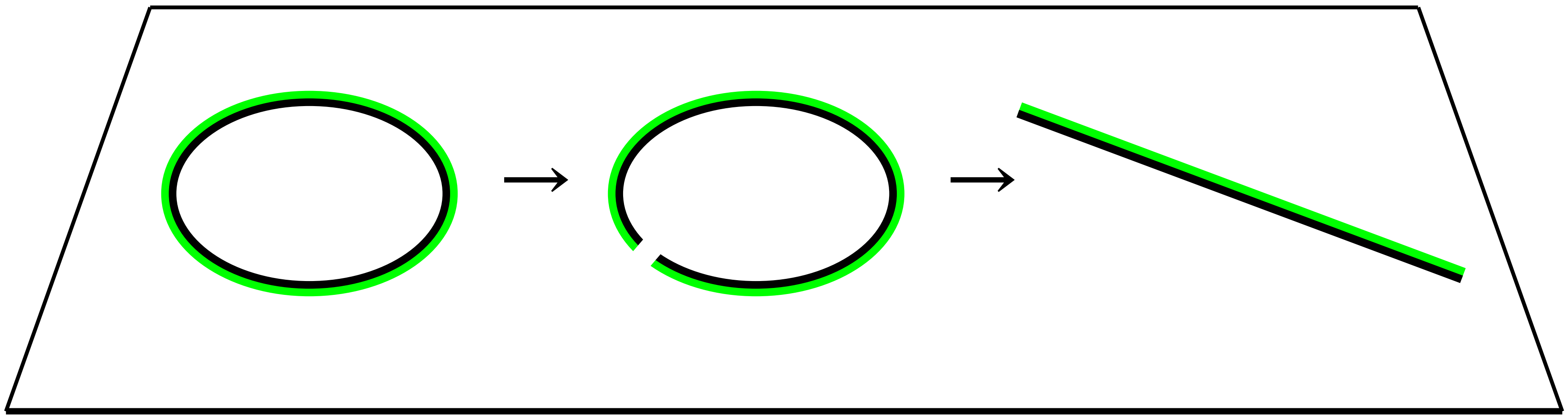
縦縞の浮き輪を裏返すと横縞になる



円を裏返す

2次元空間上の円(S^1)

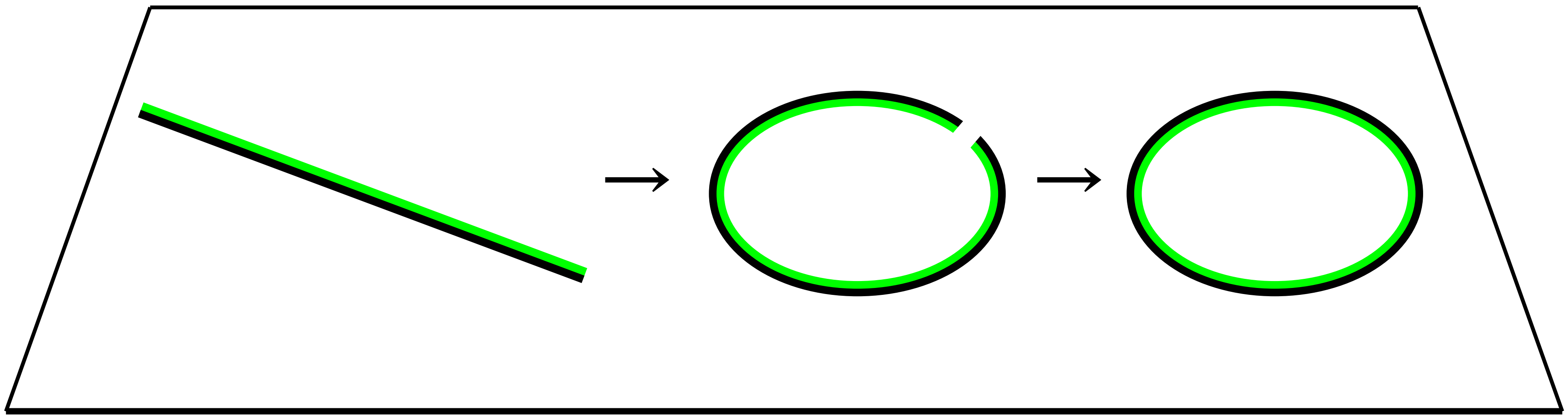
- 裏表がある。
- 裏返すには，穴をあける必要がある。



円を裏返す

2次元空間上の円(S^1)

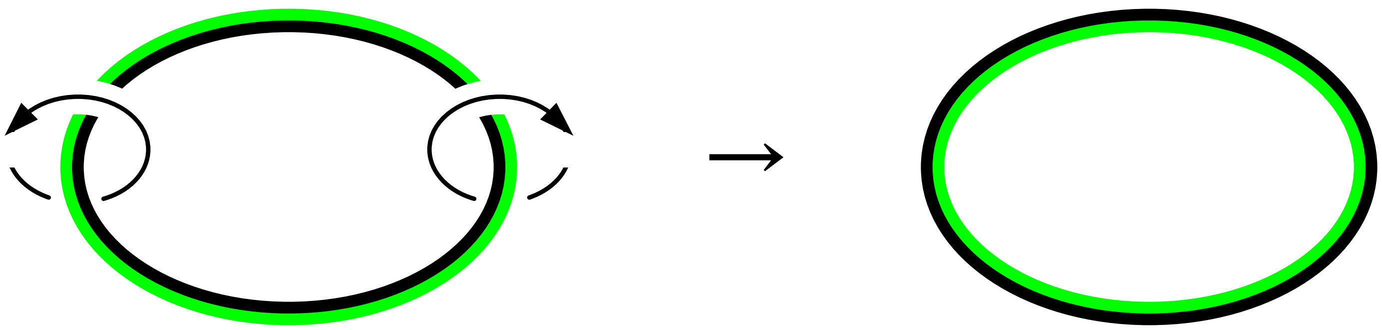
- 裏表がある。
- 裏返すには，穴をあける必要がある。



円を裏返す

3次元空間上の円(S^1)

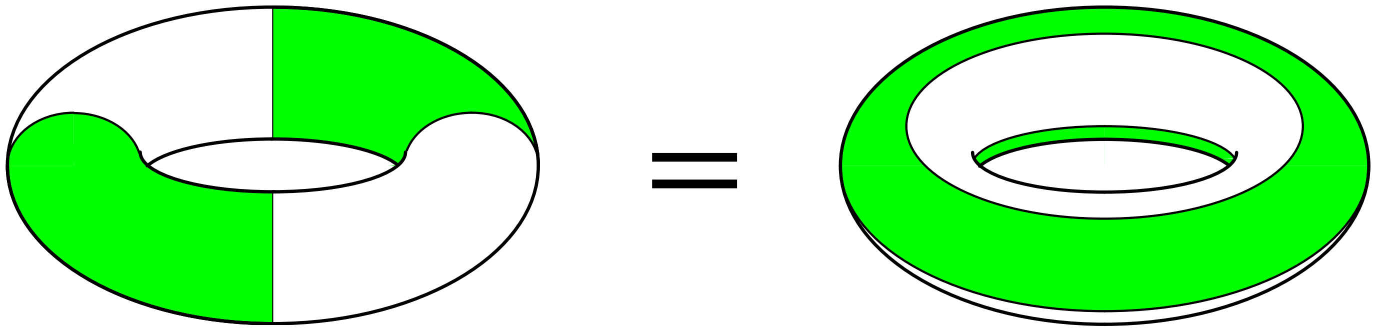
- 穴をあける必要なし
- 連続して移行できる(裏表の区別なし)



トーラスを裏返す

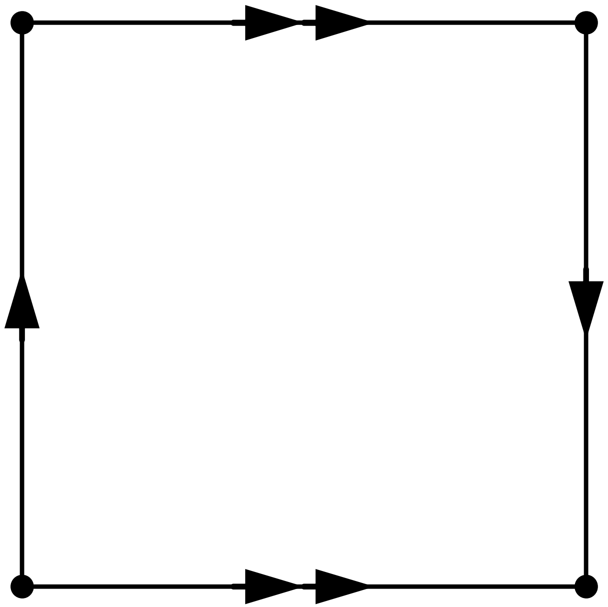
4次元空間上のトーラス

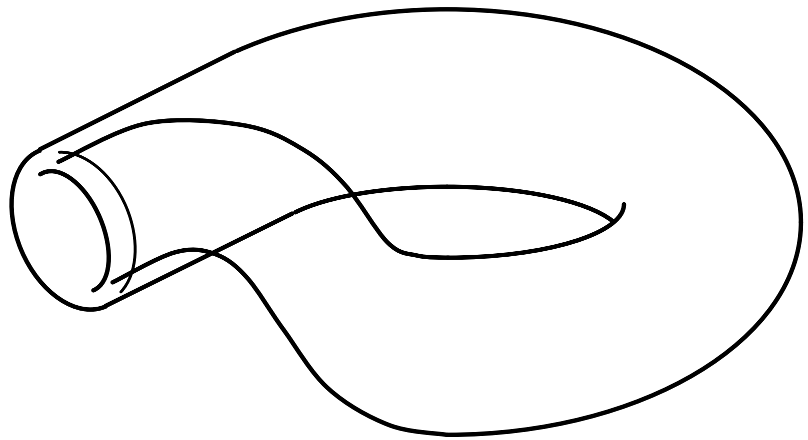
- 穴をあける必要なし
- 連続して移行できる(裏表の区別なし)



縦縞のトーラスと横縞のトーラスは，同じもの

クラインの壷

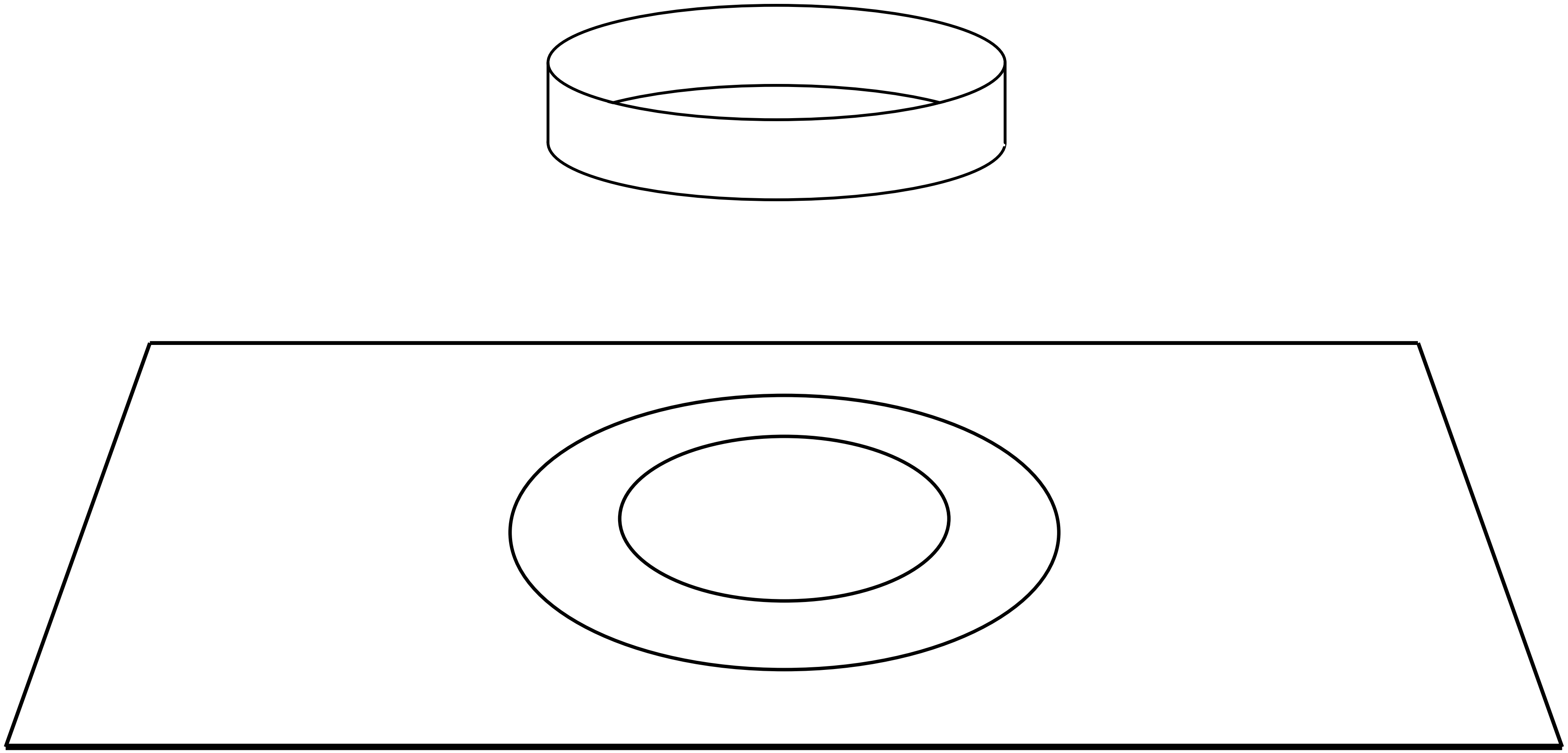




- 実際には自己交差していない
- クラインの壷は, R^3 に embed できない

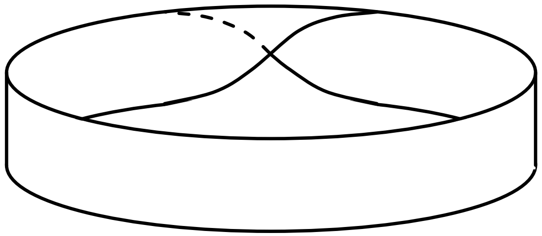
embedding

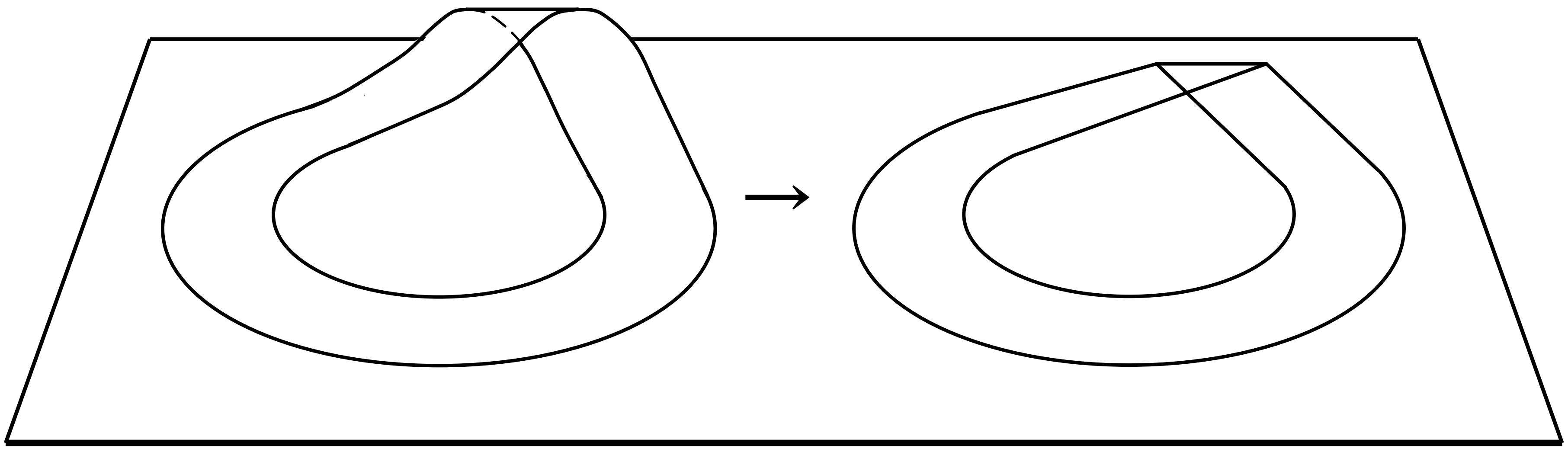
円筒は R^2 に embed できる



embedding

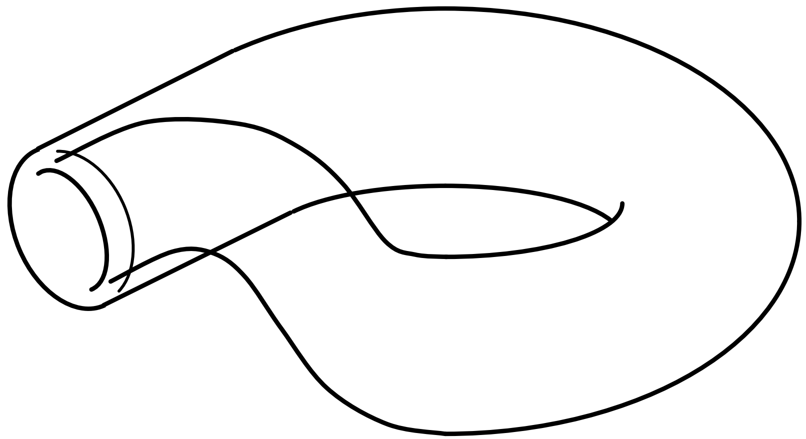
メビウスの帯は R^2 に embed できない





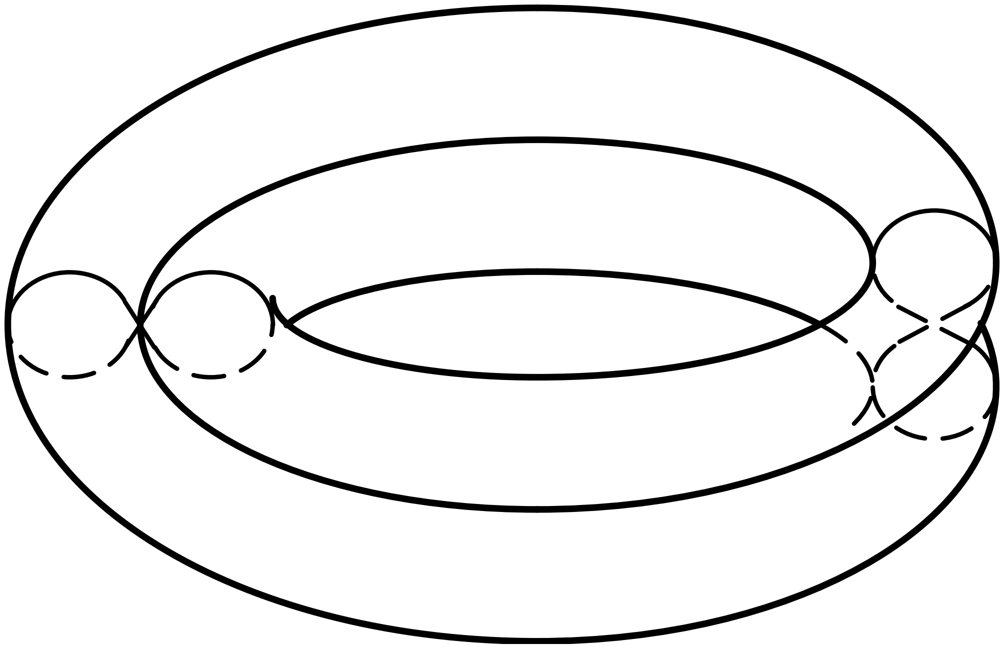
embedding

クラインの壷は, R^3 には embed できない



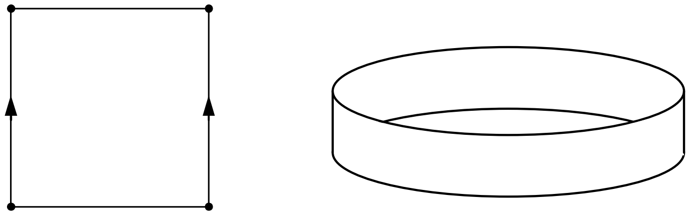
クラインの壷

クラインの壷の別表現

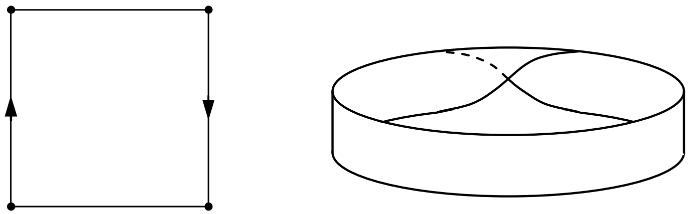


8の字チューブの半捻り輪

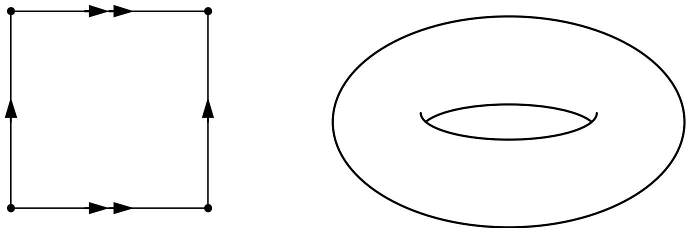
図形を作ってみよう



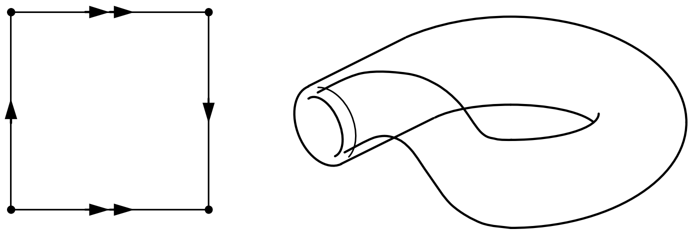
円筒



メビウスの帯

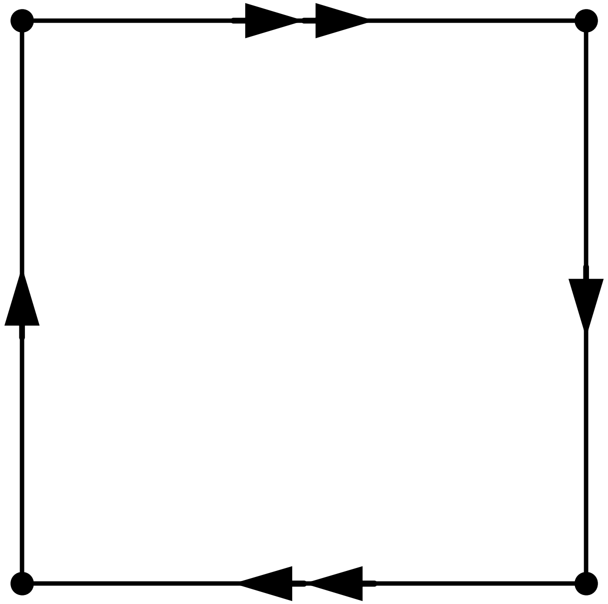


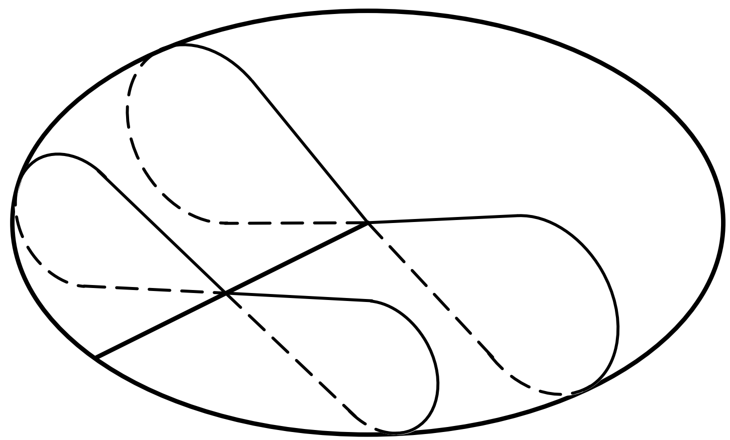
トーラス



クラインの壺

実射影平面(RP^2)

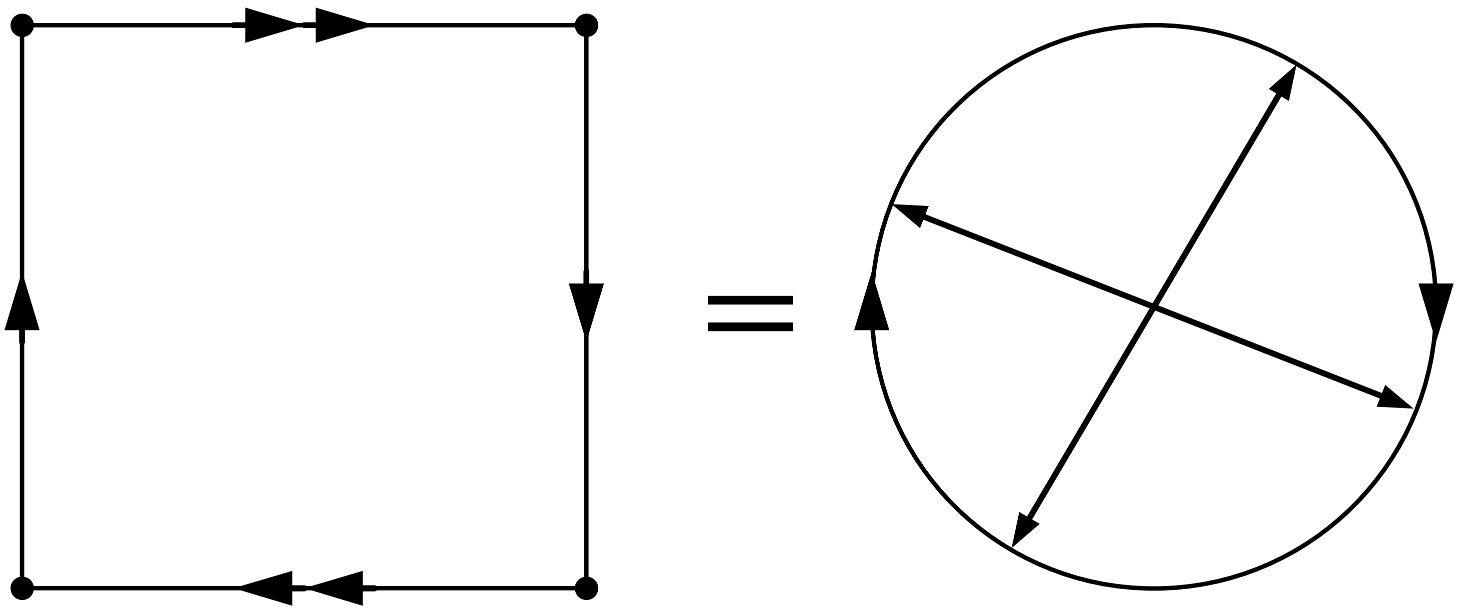




実射影平面(projective plane)

注意：射影に使う平面(projection plane)ではない

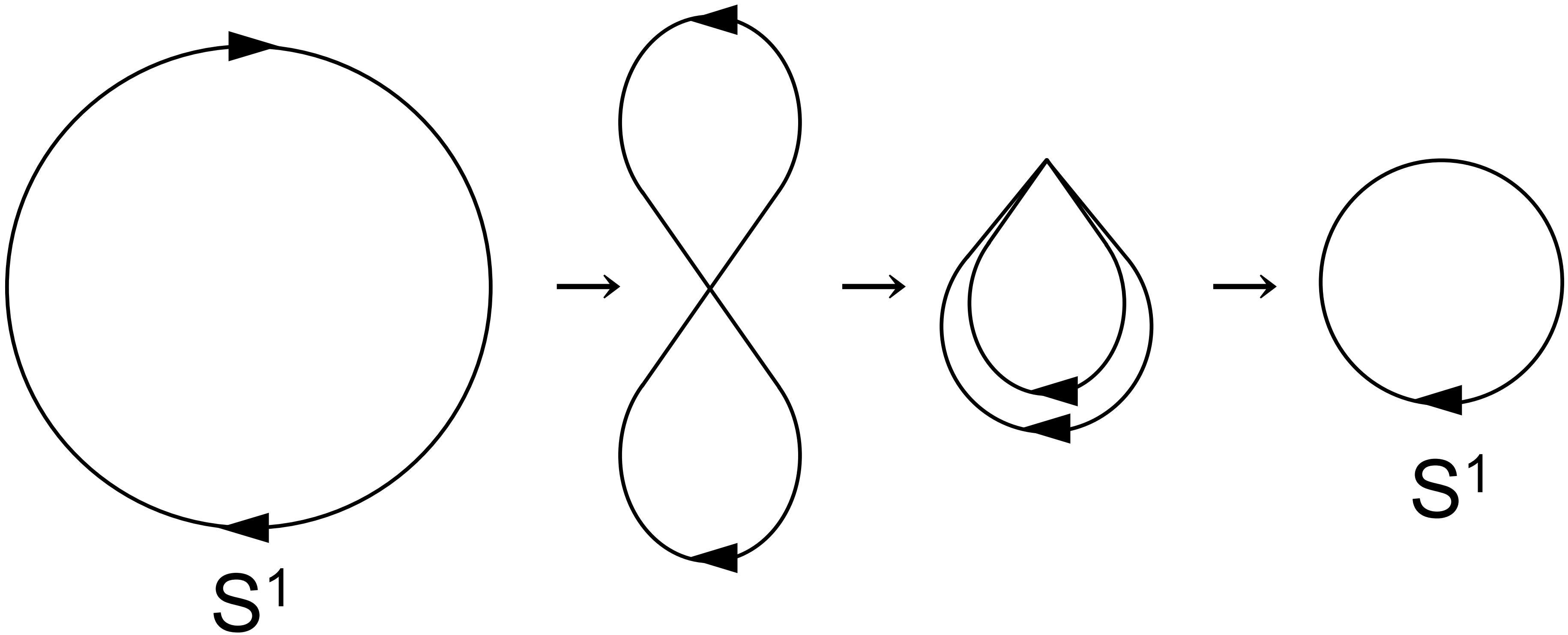
実射影平面(RP^2)



円板(D^2)の縁の対蹠点(たいせきてん)を同一視

対蹠点の同一視

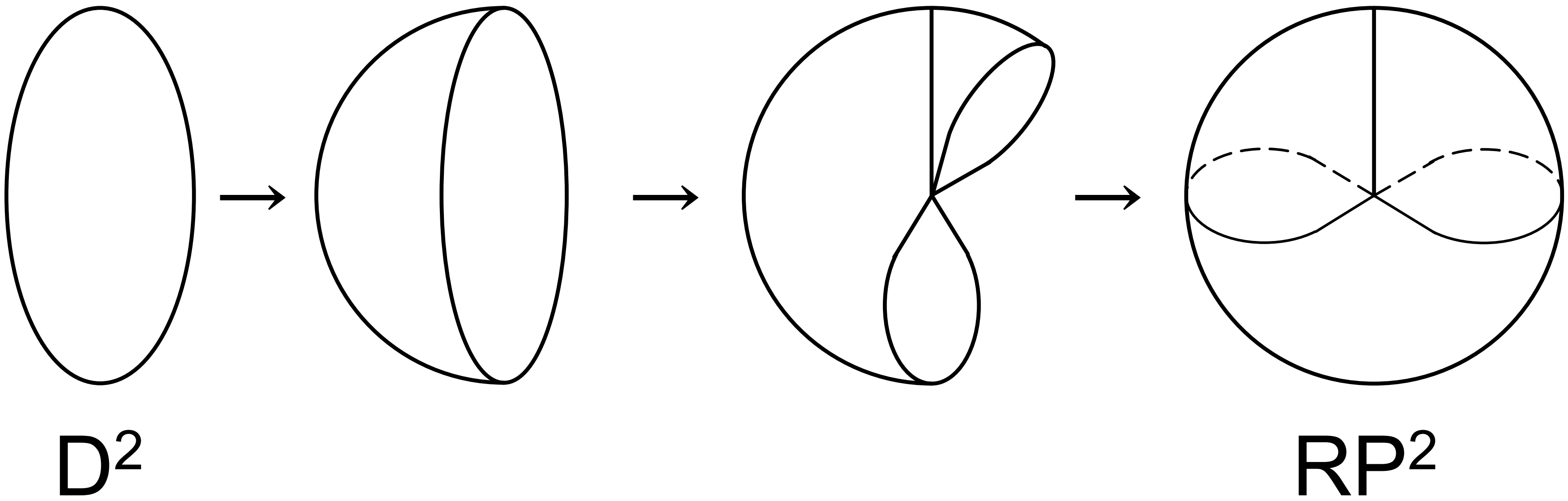
S^1の対蹠点の同一視は簡単



輪ゴムを2重にする要領

実射影平面(RP^2)

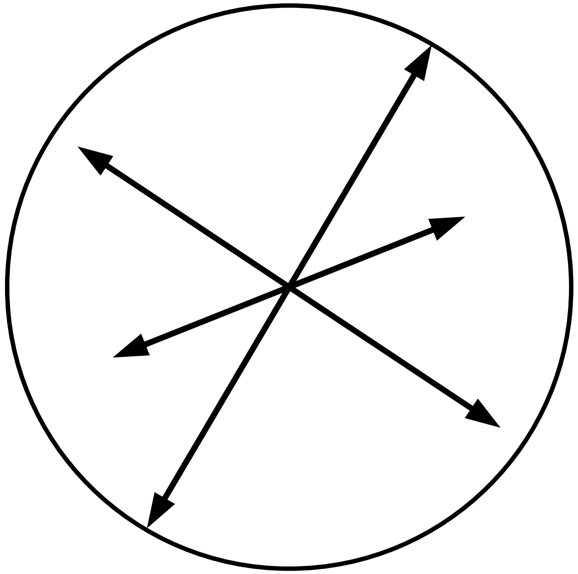
円板(D^2)の縁の対蹠点を同一視



実射影平面(RP^2)

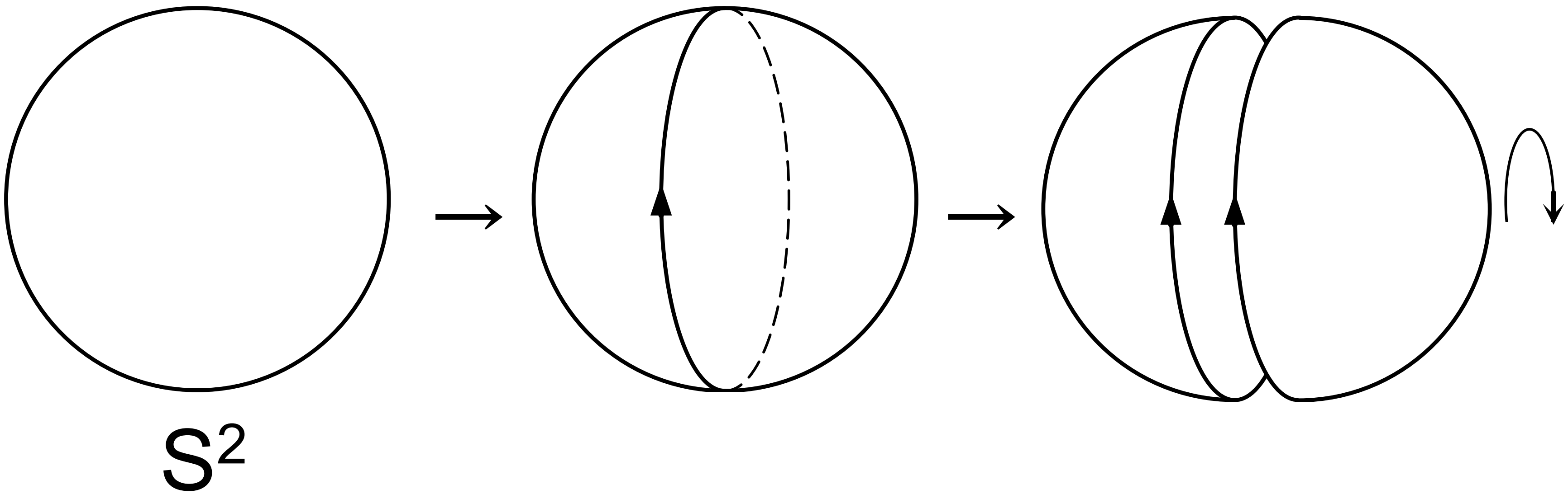
別の作り方

- 球面(S^2)の対蹠点を同一視



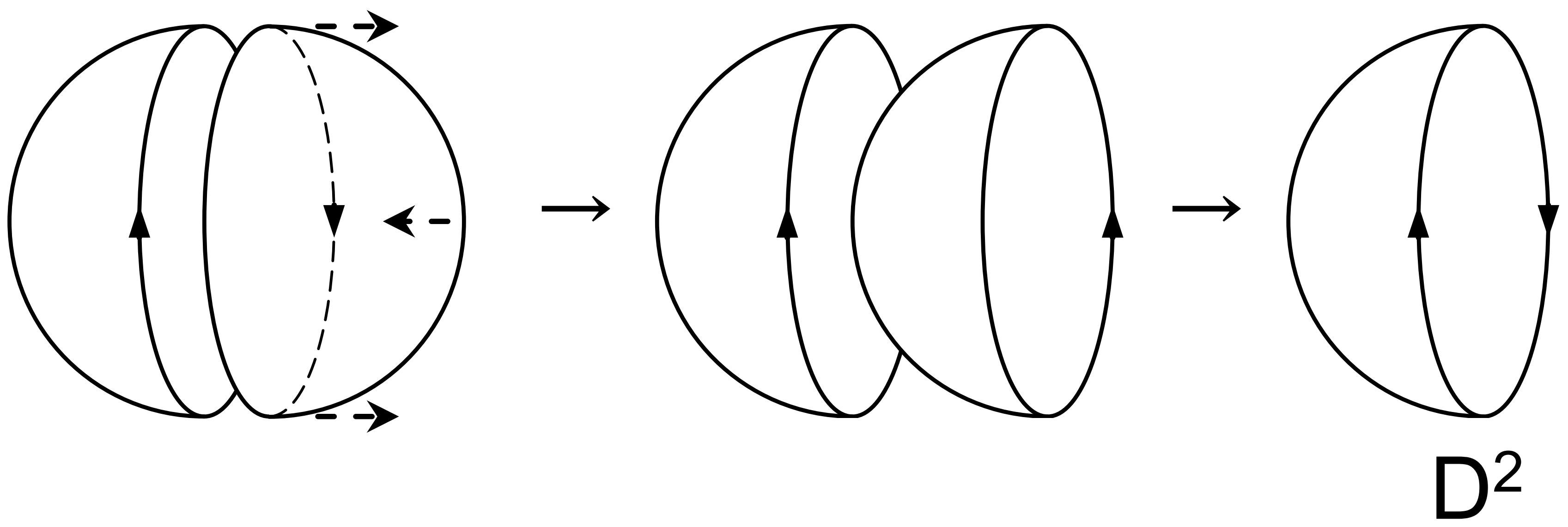
実射影平面(RP^2)

球面(S^2)の対蹠点を同一視・・・



実射影平面(RP^2)

球面(S^2)の対蹠点を同一視・・・



・・・円板(D^2)の縁の対蹠点を同一視

実射影平面(RP^2)

実射影平面(RP^2)

- S^2 の対蹠点を同一視
- D^2 の縁の対蹠点を同一視
- その他
  (メビウスの帯に蓋をする etc.)

実射影空間(RP^3)

実射影空間(RP^3)

- S^3 の対蹠点を同一視
- D^3 の表面の対蹠点を同一視

RP^3 と3次元回転との対応

S^3 の対蹠点を同一視

四元数(quaternion) $q = (q_x, q_y, q_z, q_w)$

単位四元数 $q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2 + q_w{}^2 = 1$

⇒ S^3

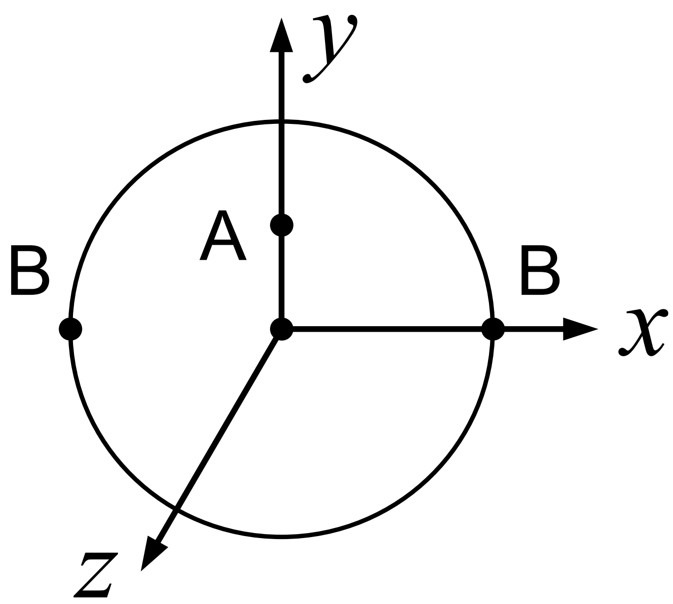
q と -q は同じ回転を表す

⇒ 対蹠点の同一視

RP^3 と 3次元回転との対応

D^3 の表面の対蹠点を同一視

- 半径 π の球
- 球内の点 $(x, y, z) = \mathbf{v}$ は, 回転軸 $\mathbf{v}$, 回転角 $|\mathbf{v}|$ の回転を表す



例:

A : y軸回転 $\pi/2$

B : x軸回転 $\pi(-\pi)$

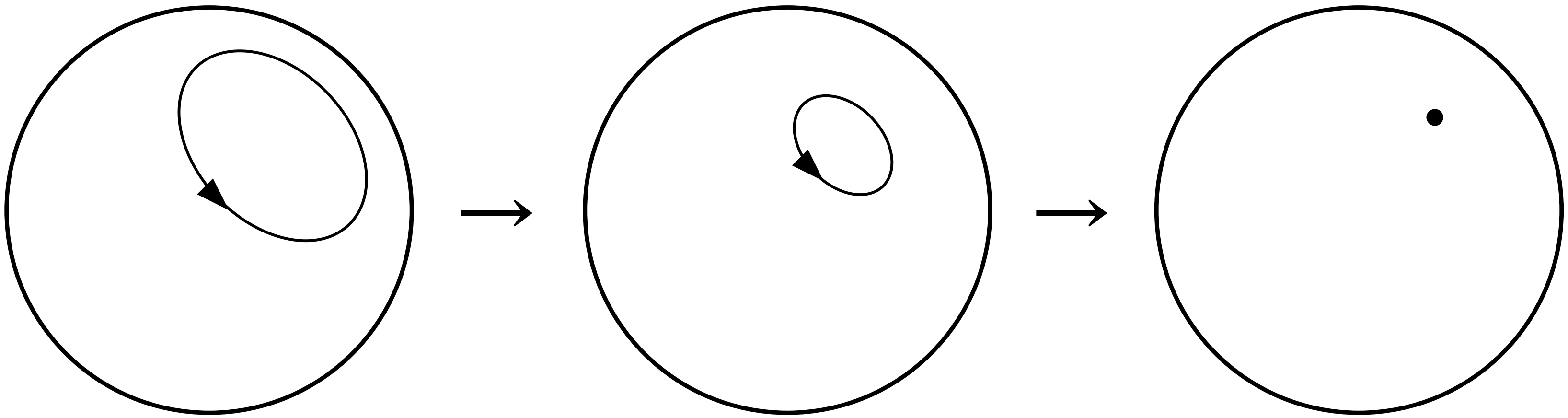
実射影空間の性質

単連結(simply connected)ではない

単連結(simply connected)

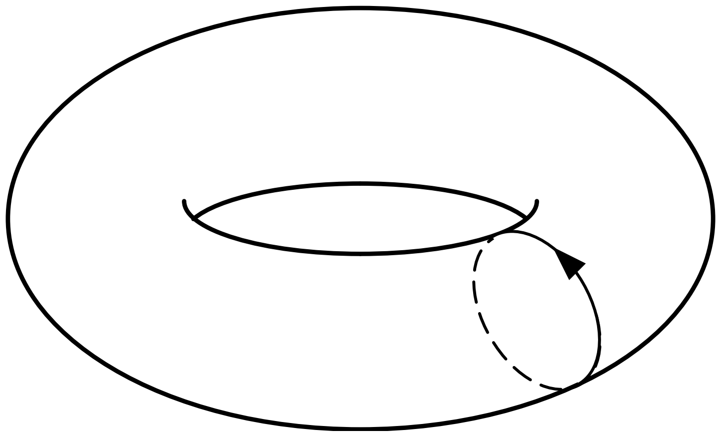
どんなループでも１点に収縮できる
(空間内で，連続的に移行させる)

球面(S^2)は単連結



単連結(simply connected)

トーラスは単連結ではない

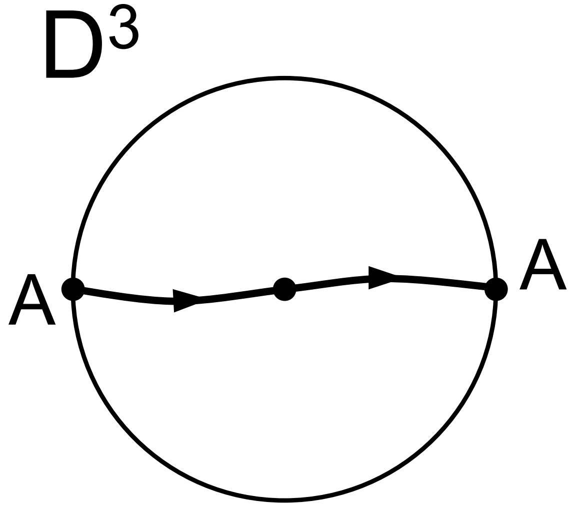


１点に収縮できないループが存在する

実射影空間の性質

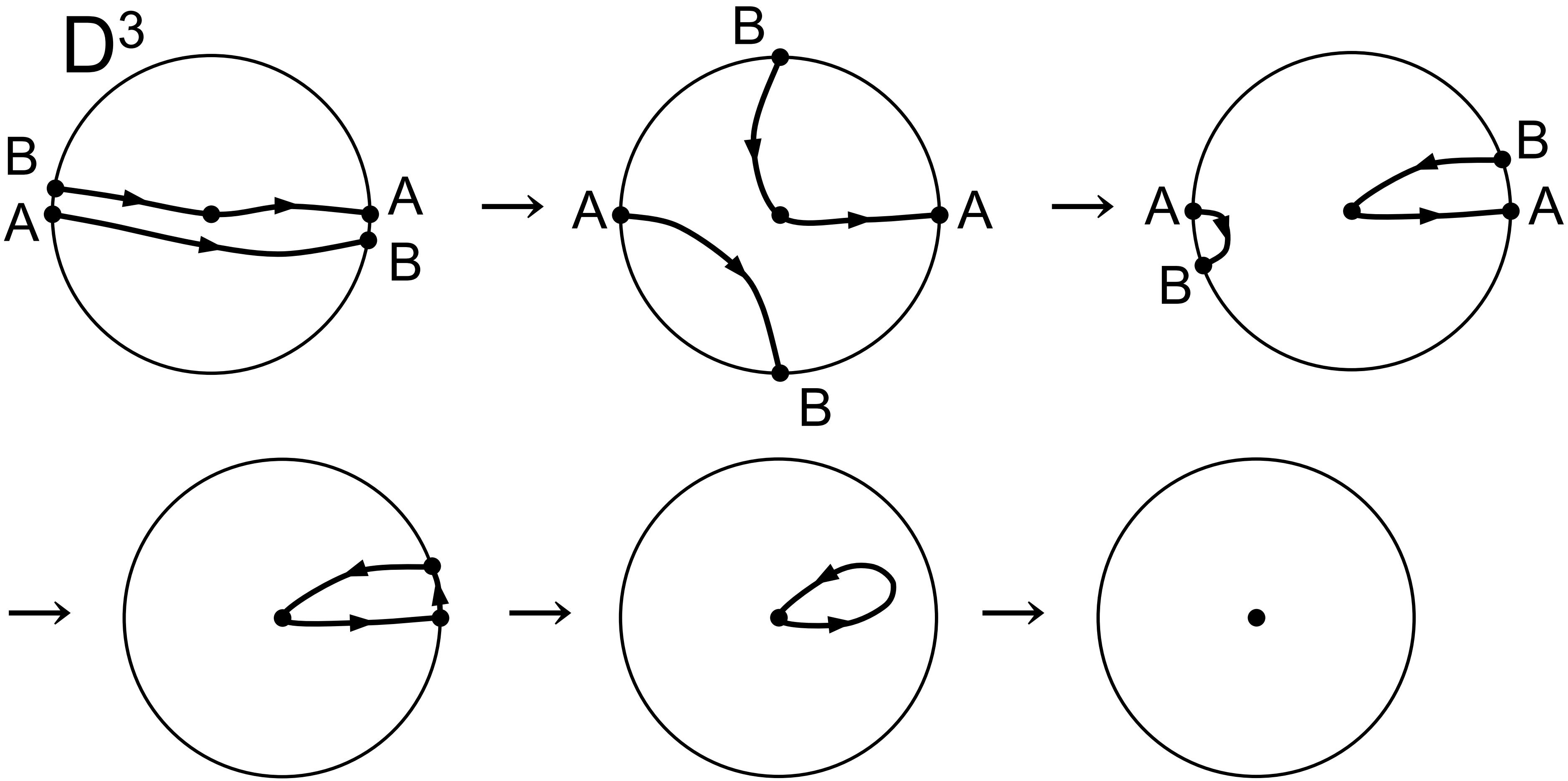
単連結ではない

- 1点に収縮できないループが存在する



実射影空間の性質

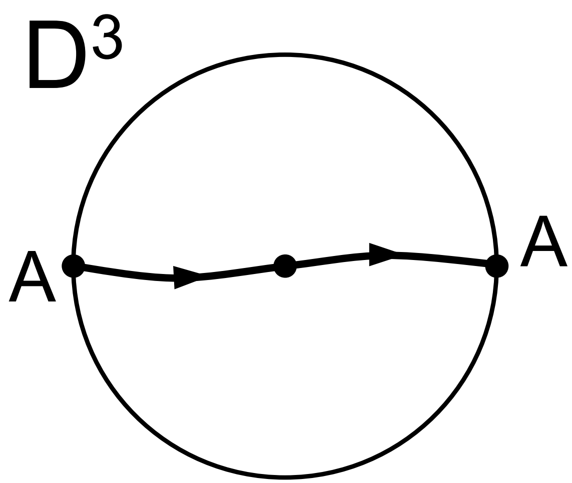
2重ループは１点に収縮できる

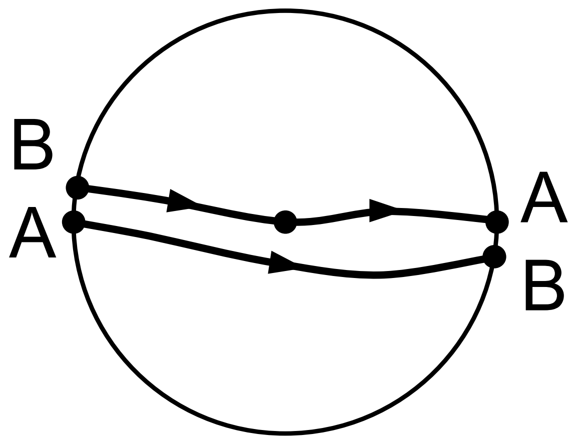


実射影空間の性質

2重ループは 1点に収縮できる

- plate trick, waiter's trick
- テープを使ったデモ (Dirac belt trick)





実射影空間の性質

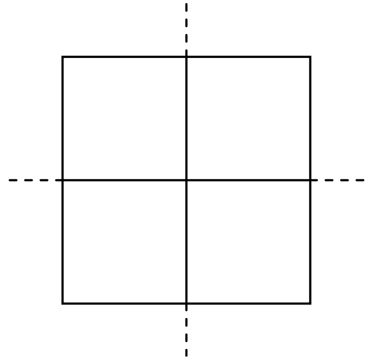
単連結(simply connected)ではない

捻れている

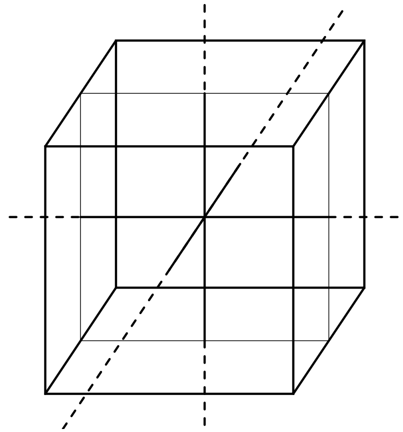
- 直積ではなく,「自明でない fiber bundle」

直積

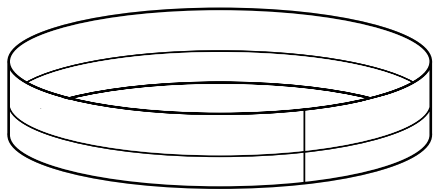
直線 と 直線 の直積 ＝ 平面



平面 と 直線 の直積 ＝ 空間

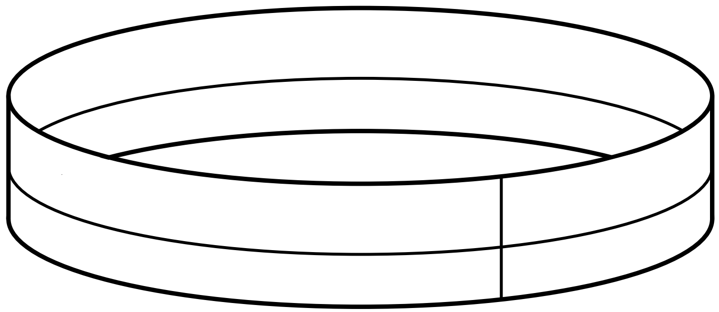


円 と 線分 の直積 ＝ 円筒



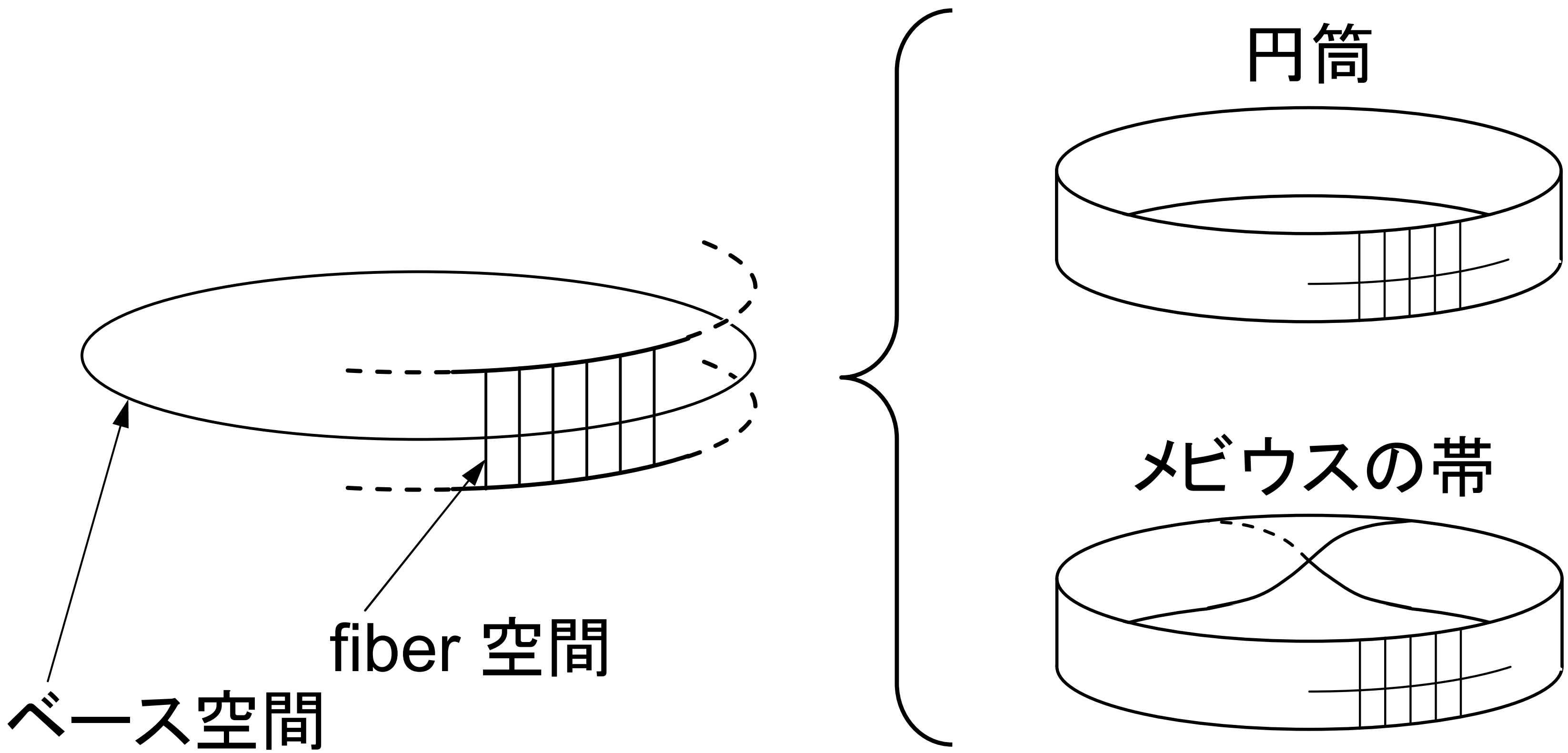
直積

円筒

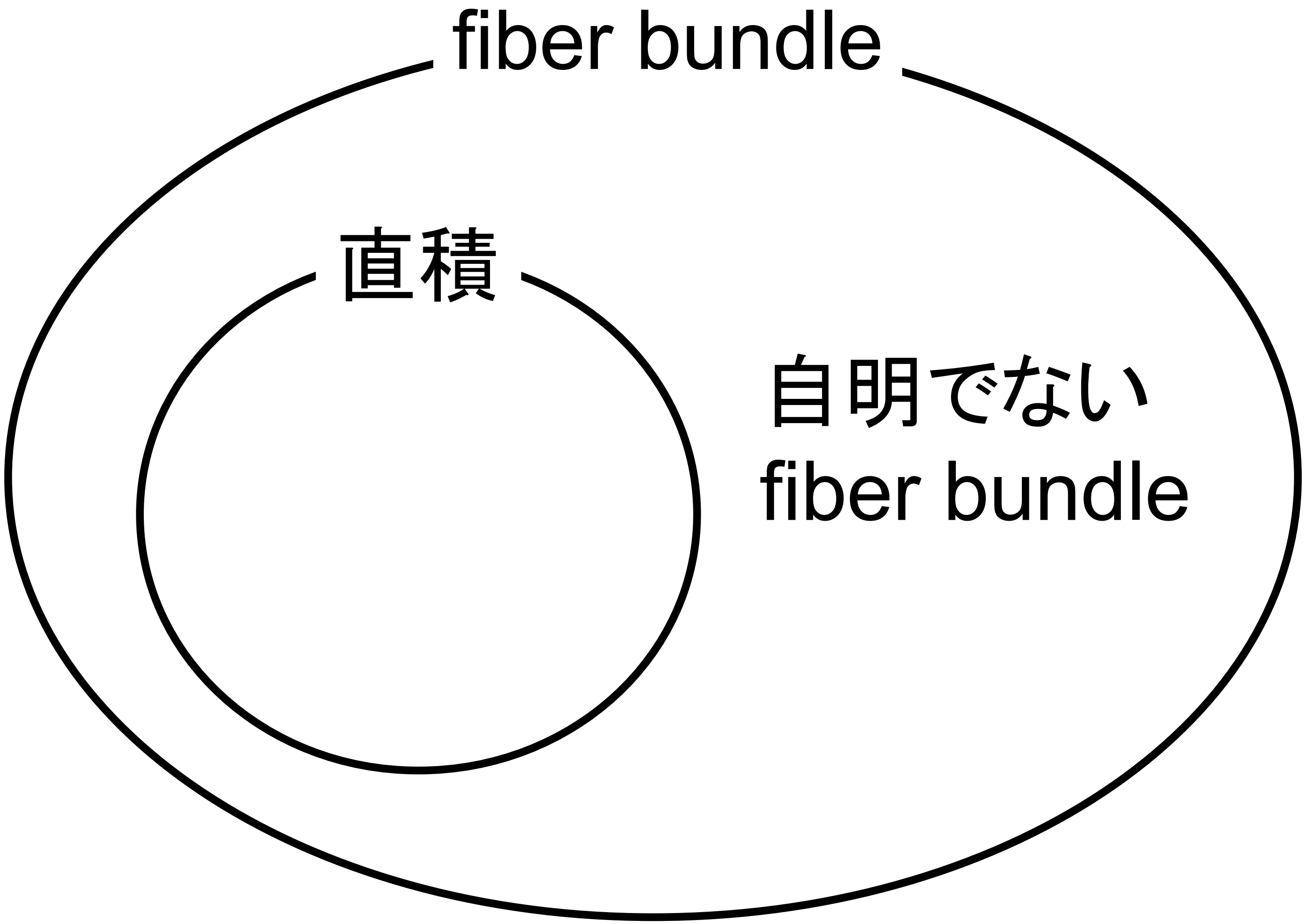


$S^1 \times$ 線分
$=$ 線分 $\times\ S^1$

fiber bundle

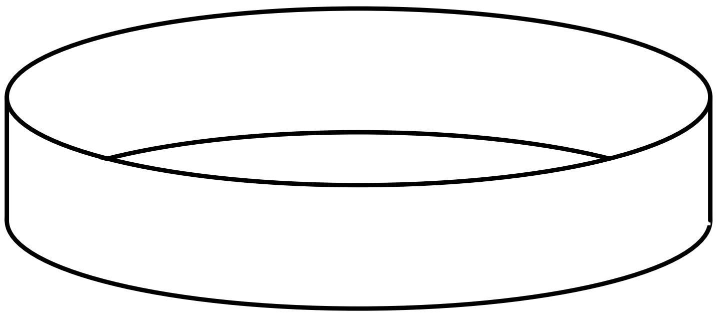


直積と fiber bundle



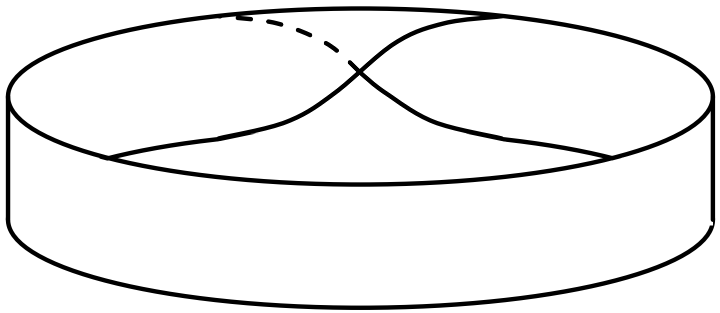
直積と fiber bundle

円筒



S^1と線分の直積

メビウスの帯



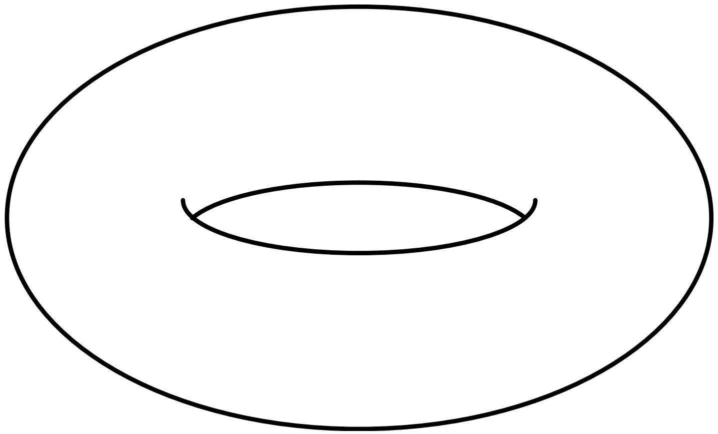
自明でない fiber bundle

ベース空間 : S^1

fiber 空間 : 線分

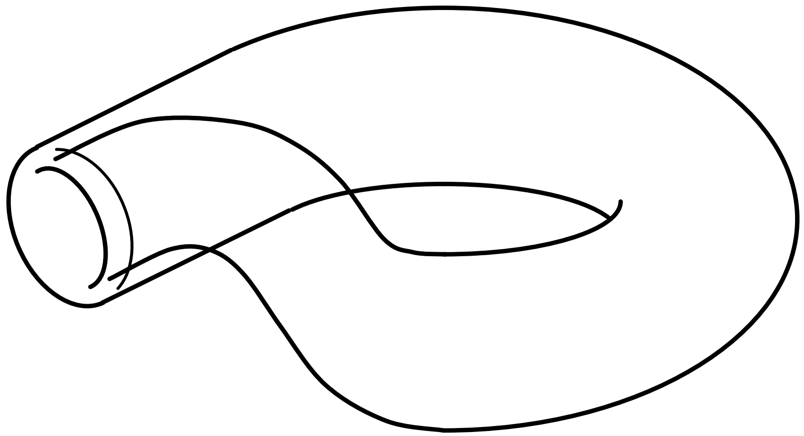
直積と fiber bundle

トーラス



S^1 と S^1 の直積

クラインの壷



自明でないfiber bundle

ベース空間 : S^1

fiber 空間 : S^1

実射影空間の性質

RP^3 は S^2 と S^1 の直積ではない
(自明でない fiber bundle)

RP^3 を S^2 と S^1 で表すと, 特異点が出現する

3次元ローテーションの形
||
実射影空間(RP^3)

作り方

- S^3 の対蹠点を同一視
- D^3 の表面の対蹠点を同一視

特徴

- 単連結(simply connected)ではない
- 直積ではなく,「自明でない fiber bundle」(捻れている)

3次元ローテーションの形

トポロジーに関する~~ヨタ話~~
雑学

雑学のすすめ