

射影を用いた関節角度制限方法

(株)バンダイナムコゲームス
 コンテンツ制作本部 制作統括ディビジョン
 技術部 技術サポート課
 山口兼太郎

ゲームに登場するキャラクタや可動構造物の多くには、スケルトンモデルが使われており、その関節部の可動範囲制限には x, y, z 各軸回りの回転角が多用されている。しかし、この従来手法では、関節の曲げ状態と回転角との対応が地球儀の緯度・経度状になるため、北極・南極が特異点となり、関節の可動範囲を広く($\pm 90^\circ$ を超えて)設定する際に問題があった。これに対し新手法では、球面から平面への射影を使うことにより、特異点を1個に減らし、広い可動範囲の設定を可能にした。

1. 従来手法(3軸回転角方式)

1.1 座標系

関節の両側の骨のうち一方を親骨、他方を子骨と呼ぶことにする。関節の回転(曲げ、捻り)の状態は、親骨を基準とした子骨の向きで表すことができる。骨の向きを表すために、各骨に対して図1のように座標系を定める。

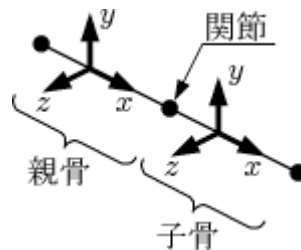


図1: 親骨, 子骨と座標系

1.2 3軸回転角による表現

従来手法では、親骨に対する子骨の向きを xyz 3軸の回転角度(それぞれ r_x, r_y, r_z とする)で表し、各軸の回転角に可動範囲を設定する。回転の順序は種々考えられるが、以下の例では、親骨の座標系を基準として x 軸回転, z 軸回転, y 軸回転の順とする。

関節点を中心とする半径 1 の球面 S を作り、子骨の x 軸と球面 S との交点を P とする。関節の曲げ状態は、点 P の位置で表すことができる。3軸回転角度と P の位置との関係を図示すると、図2のように地球儀の緯度、経度と同様の形状になる。この図では、回転角度を 10° 間隔で表示している。 r_y が経度、 r_z が緯度に相当する(r_x はその位置での捻りに相当する)。

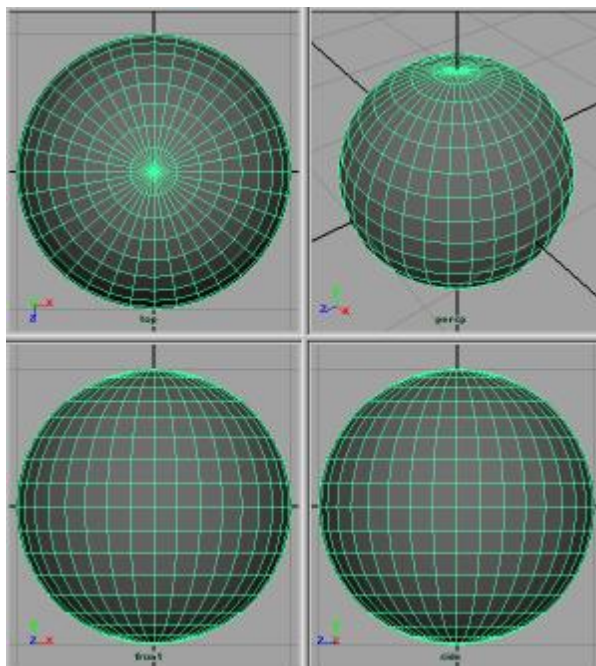


図2: 3軸回転角方式による r_y, r_z と球面 S 上の位置との関係(r_y, r_z は 10° 間隔)

1.3 可動範囲の設定

関節の曲げ角度に可動範囲を設定することは、球面 S 上に可動領域を設定することに相当する。例えば、 y 軸回転が $-40^\circ \sim 20^\circ$ 、 z 軸回転が $-10^\circ \sim 30^\circ$ の場合、可動領域は図3 のようになる。球の中心と可動領域の境界とを結んで、可動領域らしく表示すると図4のようになる。

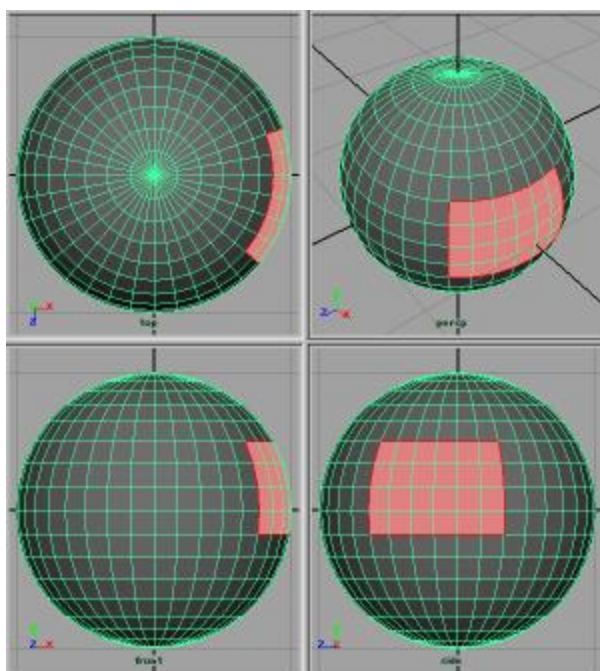


図3: 3軸回転角方式による関節可動領域
($r_y: -40^\circ \sim 20^\circ, r_z: -10^\circ \sim 30^\circ$)

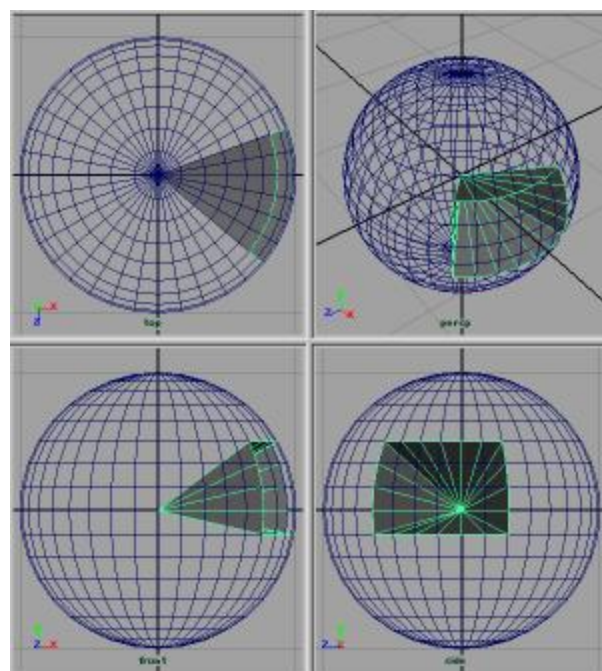


図4: 3軸回転角方式による関節可動領域
($r_y: -40^\circ \sim 20^\circ, r_z: -10^\circ \sim 30^\circ$)

この例のように可動範囲が狭い場合は問題ないが、 z 軸回転の可動範囲が $\pm 90^\circ$ を超える設定をしようとする、問題が生じる。緯度の値は $-90^\circ \sim 90^\circ$ の範囲を超えられないからである。敢えて工夫をすれば、可動領域の設定自体は可能である。例えば、 r_y が $-40^\circ \sim 20^\circ$ 、 r_z が $-10^\circ \sim 110^\circ$ の場合、図5, 6, 7 のような可動領域設定が考えられる。しかし、いずれも領域の形状がいびつになったり、領域設定作業が複雑になるという問題が残る。

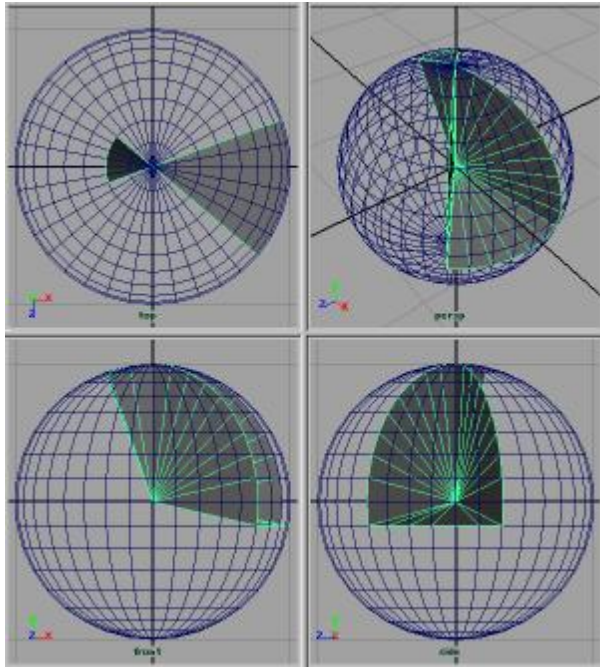


図5: 3軸回転角方式による関節可動領域設定の例(1)
 ($r_y: -40^\circ \sim 20^\circ$, $r_z: -10^\circ \sim 110^\circ$)

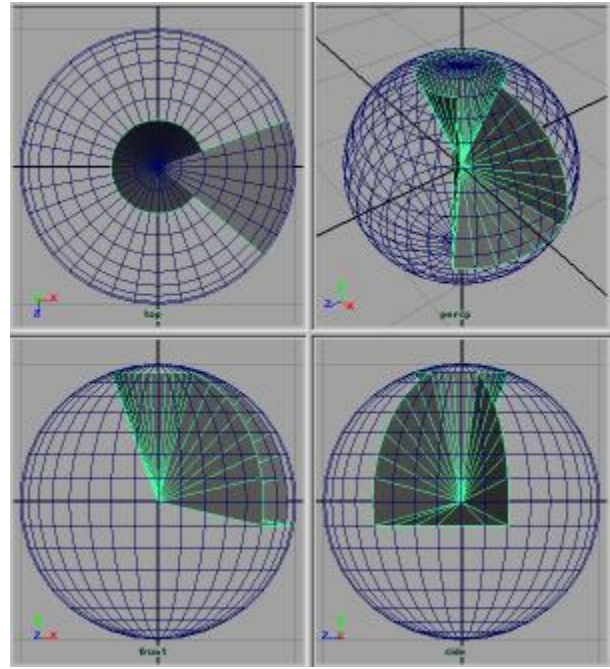


図6: 3軸回転角方式による関節可動領域設定の例(2)
 ($r_y: -40^\circ \sim 20^\circ$, $r_z: -10^\circ \sim 110^\circ$)

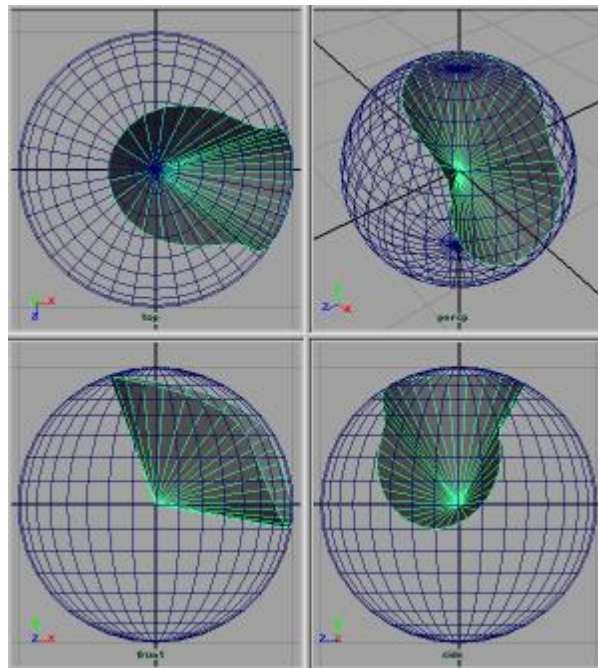


図7: 3軸回転角方式による関節可動領域設定の例(3)
 ($r_y: -40^\circ \sim 20^\circ$, $r_z: -10^\circ \sim 110^\circ$)

2. 射影方式

2.1 球面から平面への射影

図8のように、座標(-1, 0, 0)の点を P_0 とし、 $x = 0$ の平面を λ とする。球面 S 上の点 P を、点 P_0 を原点 (光源) とし、平面 λ に射影し、点 Q を得る。この射影を f とし、 P から Q への変換を $Q = f(P)$ で表す。逆に、 Q から P への射影を f^{-1} とし、 $P = f^{-1}(Q)$ と表す。 P_0 を球面 S の極と呼ぶ。

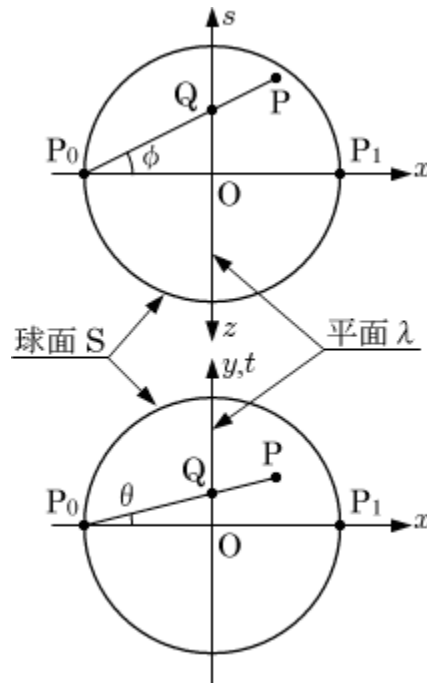


図8: 球面 S 上の点 P から平面 λ 上の点 Q への射影

射影 f により、球面 S 上の点 (ただし P_0 を除く) と平面 λ 上の点は、1対1 の対応関係 (1対1 写像) となる。 $f(P_0)$ は平面 λ 上の無限遠点となる。平面 λ 上で Q の可動領域を設定することによって、球面 S 上の P の位置を制限し、関節の角度制限を実現する。

平面 λ 上に st 直交座標系をとり、点 Q の位置を st 座標で表す。点 P_1 の座標を $(1, 0, 0)$ とし、 $f(P_1)$ を st 座標の原点とする。 $f(P_1)$ は xyz 座標の原点に一致する。 s, t の方向はそれぞれ $z-, y+$ の方向とする。この設定により、 zx 平面内で P に y 軸回転を掛けたときの Q の移動方向が s 方向になり、 xy 平面内で P に z 軸回転を掛けたときの Q の移動方向が t 方向になる。

射影 f による点 P (座標 x, y, z) から点 Q (座標 s, t) への変換は次式のようにになる。ただし $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である。

$$\begin{aligned} s &= -z / (x + 1) \\ t &= y / (x + 1) \end{aligned} \quad (1)$$

射影 f^{-1} による Q から P への変換は次式のようにになる。得られる結果は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすので、正規化のための余分な処理は不要である。

$$\begin{aligned} x &= 2 / (s^2 + t^2 + 1) - 1 \\ y &= 2t / (s^2 + t^2 + 1) \\ z &= -2s / (s^2 + t^2 + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 関節角度との対応関係

図8のように角 ϕ, θ をとると、

$$\begin{aligned} s &= \tan \phi \\ t &= \tan \theta \end{aligned} \quad (3)$$

と表すことができる。 ϕ, θ の範囲は, $-90^\circ < \phi < 90^\circ$, $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ である。 ϕ, θ の値を -85° から 85° まで 5° 間隔で変えて平面 λ 上にグリッド(格子線)を作り, これを f^{-1} で球面 S に射影すると, 図9 のような直交グリッドが得られる。

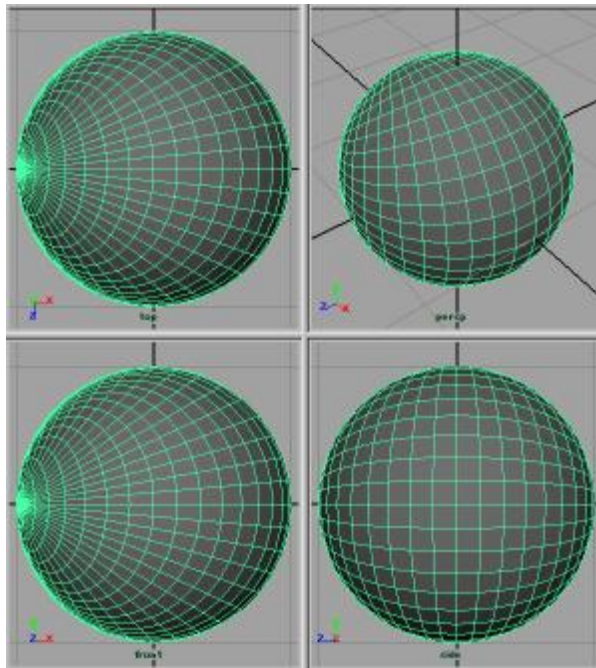


図9: λ 上のグリッドを球面 S に射影したもの(ϕ, θ は 5° 間隔) (図2 と比較されたい)

従来の 3軸回転角方式と射影方式との対応について考える。 $r_z = 0$ の場合の r_y と ϕ との関係は 図10 のようになる。

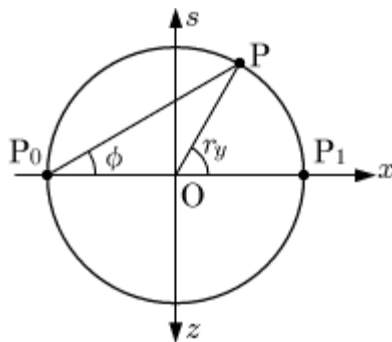


図10: r_y と ϕ との関係($r_z = 0$ の場合)

角度の関係は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \angle P_0 P O &= \angle P P_0 O = \phi \\
 \angle P_0 P O + \angle P P_0 O &= \angle P O P_1 = r_y \\
 \therefore \phi &= r_y / 2
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

同様に, $r_y = 0$ の場合には $\theta = r_z / 2$ となる。そこで, 可動範囲を設定する際に次式のように s, t と r_y, r_z とを対応させれば, 図2, 9 に見られるように, r_y, r_z の絶対値が小さい領域では, 両者の角度制限領域は概ね同形状になる。

$$\begin{aligned} s &= \tan(r_y / 2) \\ t &= \tan(r_z / 2) \end{aligned} \tag{5}$$

図11のように、球面S上の点Pの位置を角度座標 α で表す場合を考える。 α が緯度の場合、言い換えれば α がz軸回転角 r_z の場合には、Pの座標は α_1 となる。一方 α が経度の場合、即ち α が r_y の場合には、Pの座標は α_3 となる。これに対して射影方式では、Pの座標は α_2 となる。このように、射影方式による関節角度表現は、緯度表現と経度表現との中間の値をとる。そのため、従来の角度表現から大きく乖離することがない。

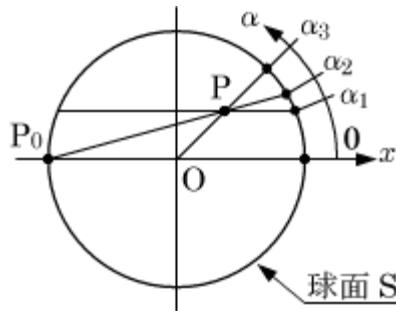


図11: 射影方式と緯度・経度表現との比較

2.3 従来方式との比較

射影方式でsを $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$ 、tを $\tan -5^\circ \sim \tan 15^\circ$ とし、可動領域を矩形制限した場合を図12に示す(図4と比較されたい)。矩形制限の詳細については、「3.1 矩形制限」で述べる。

次に、 r_z が $\pm 90^\circ$ を超える場合に相当する例を挙げる。射影方式でsを $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$ 、tを $\tan -5^\circ \sim \tan 55^\circ$ とし、可動領域を矩形制限した場合を図13に示す(図5, 6と比較されたい)。

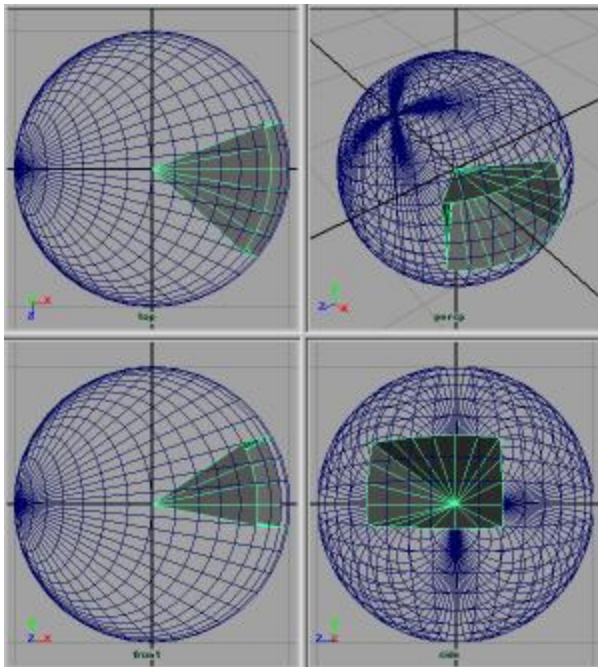


図12: 射影方式による関節可動領域 (s: $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, t: $\tan -5^\circ \sim \tan 15^\circ$, 矩形制限) (図4と比較されたい)

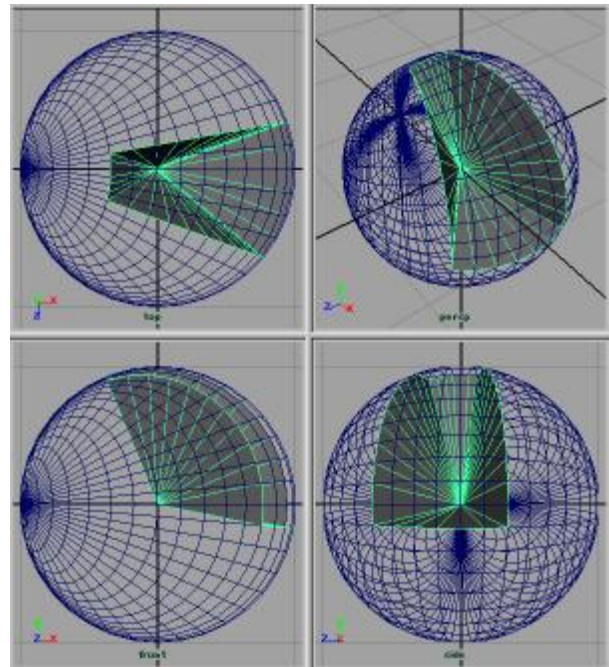


図13: 射影方式による関節可動領域 (s: $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, t: $\tan -5^\circ \sim \tan 55^\circ$, 矩形制限) (図5, 6と比較されたい)

楕円制限, 小判型制限を使うと, 可動領域はそれぞれ 図14, 15 のようになる (図7 と比較されたい)。楕円制限, 小判型制限の詳細については, それぞれ「3.2 楕円制限」, 「3.3 小判型制限」で述べる。

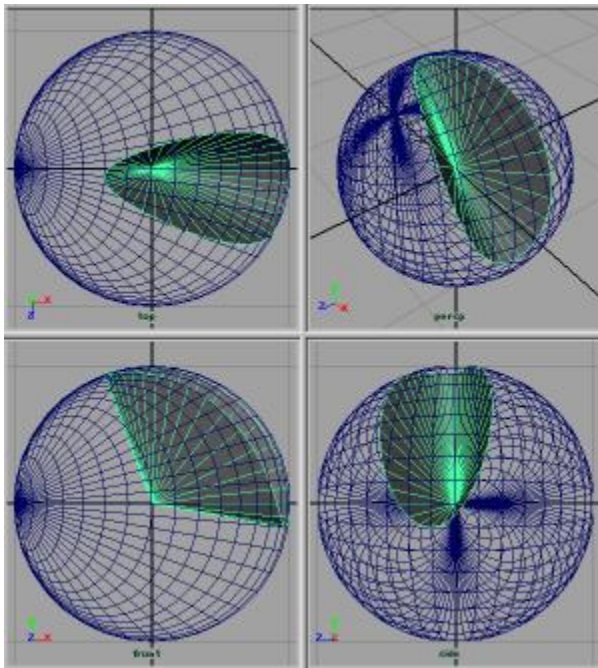


図14: 射影方式による関節可動領域
($s: \tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, $t: \tan -5^\circ \sim \tan 55^\circ$, 楕円制限) (図7 と比較されたい)

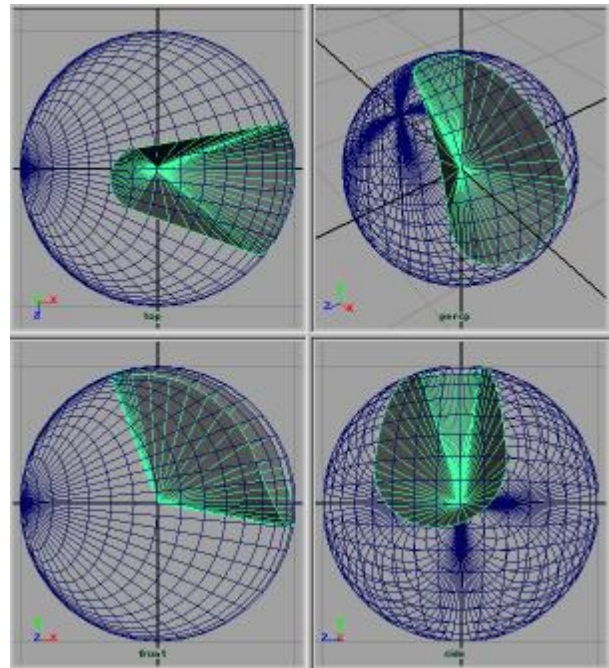


図15: 射影方式による関節可動領域
($s: \tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, $t: \tan -5^\circ \sim \tan 55^\circ$, 小判型制限) (図7 と比較されたい)

以上のように, 射影方式を使えば, 従来の 3軸回転角方式では扱えなかった $\pm 90^\circ$ を超える広い可動領域を設定できる。また, 狭い(r_y, r_z が 0° に近い)可動領域を設定する場合には, 従来の 3軸回転角方式とほぼ同形状の可動領域が得られるので, 従来方式からの移行が容易である。移行の際には, 式(5) を使って両者を対応させると良い。

3. 可動領域の設定方法

平面 λ 上の s, t の範囲を制限することにより, 関節の曲げの可動領域を設定する。以下, 特に断りのない限り s, t の可動範囲は次のように設定されているものとする。

$$\begin{aligned} s_0 &\leq s \leq s_1 \\ t_0 &\leq t \leq t_1 \end{aligned} \quad (6)$$

3.1 矩形制限

矩形制限とは, 平面 λ 上で図16 に示すように可動領域を設定する方法である。すなわち, s, t がともに 式(6) を満たす領域が可動領域となる。関節の可動領域は図12, 13 のようになる。

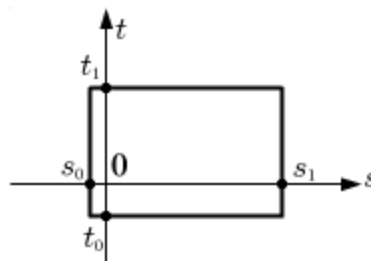


図16: 矩形制限された可動領域(平面 λ 上)

3.2 楕円制限

楕円制限とは、平面λ上で図17に示すように楕円(ellipse)形状の可動領域を設定する方法である。すなわち、式(6)で設定されたs, tの領域に内接する楕円(楕円の軸はs, t座標軸に平行)の内部が可動領域となる。関節の可動領域は図14, 18のようになる。

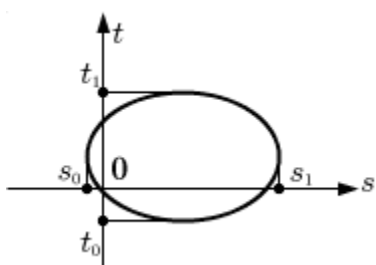


図17: 楕円制限された可動領域(平面λ上)

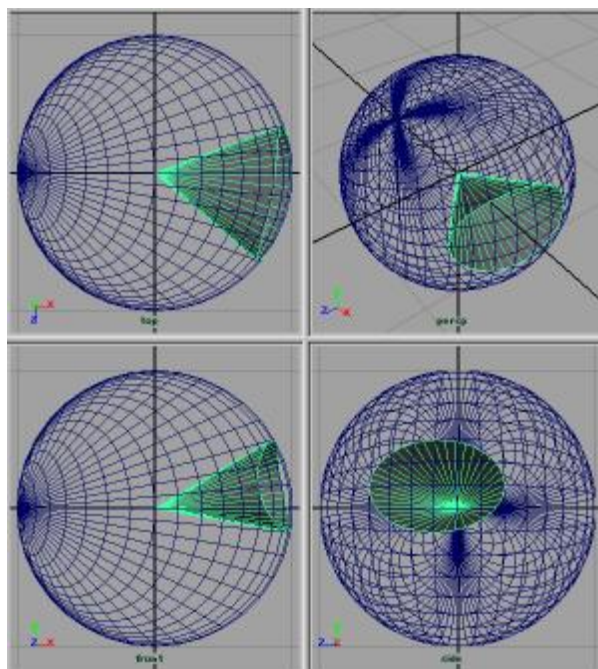


図18: 射影方式による関節可動領域
(s: $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, t: $\tan -5^\circ \sim \tan 15^\circ$, 楕円制限)

楕円制限を式で表すと次のようになる。

$$\left[\frac{s - s_b}{s_a} \right]^2 + \left[\frac{t - t_b}{t_a} \right]^2 \leq 1 \quad (7)$$

ただし, s_a, s_b, t_a, t_b は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} s_a &= (s_1 - s_0) / 2 \\ s_b &= (s_1 + s_0) / 2 \\ t_a &= (t_1 - t_0) / 2 \\ t_b &= (t_1 + t_0) / 2 \end{aligned} \quad (8)$$

楕円制限は、領域の内外判定が容易であるが、後述のように、可動領域を超えた場合の修正に関して問題がある。

3.3 小判型制限

小判型制限とは、平面λ上で図19に示すように小判型(oval)形状の可動領域を設定する方法である。領域の境界は半円と直線とで構成される。図は $s_a > t_a$ の場合で、 $t = t_0, t = t_1$ の直線部を持つ横長の形状となる (s_a, t_a は式(8)のとおり)。 $s_a < t_a$ の場合は、この図を 90° 回転させた縦長の形状になる。 $s_a = t_a$ の場合は、直線部の長さが0になるため、領域形状は円になる。

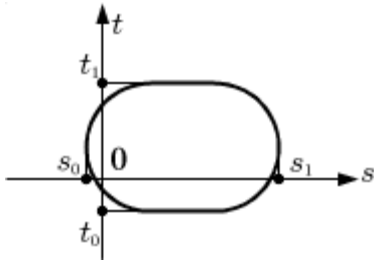


図19: 小判型制限された可動領域(平面λ上)

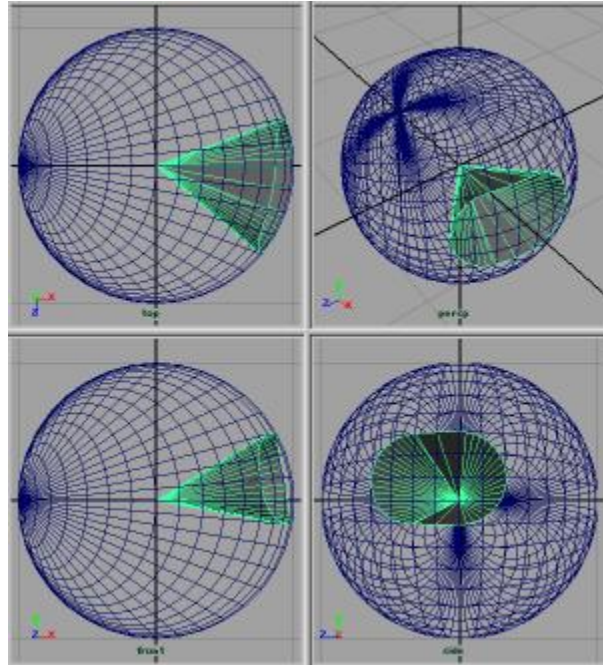


図20: 射影方式による関節可動領域 (s: $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, t: $\tan -5^\circ \sim \tan 15^\circ$, 小判型制限)

関節の可動領域は、図15, 20に示すような形状になり、その境界は4つの小円から構成される「4.2 射影 f の特徴」参照)。

3.4 その他の制限方法

3.4.1 超楕円制限

楕円制限を一般化し、超楕円制限とすることも可能である。楕円制限が2乗和であるのに対して、超楕円制限は m 乗 n 乗和となり、式で表すと次のようになる。

$$(|s - s_b| / s_a)^m + (|t - t_b| / t_a)^n \leq 1 \tag{9}$$

$m = n = 4$ (4乗和)の場合、関節の可動範囲は図21のようになる。図18, 20と比較されたい。

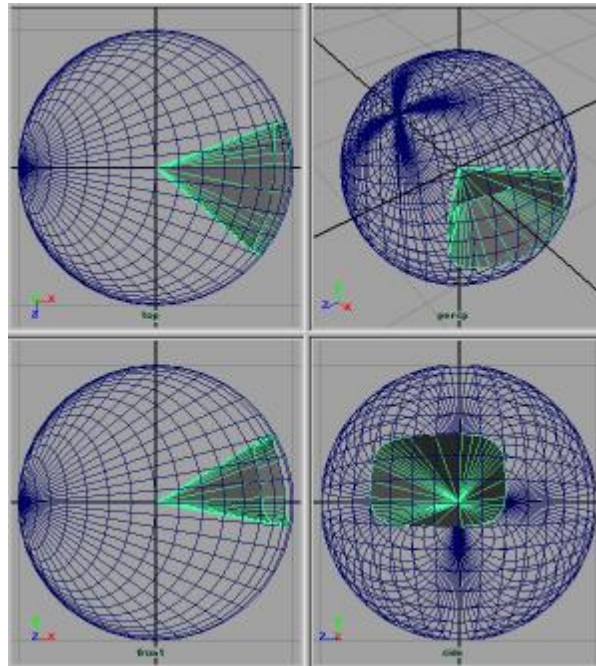


図21: 射影方式による関節可動領域
 (s: $\tan -20^\circ \sim \tan 10^\circ$, t: $\tan -5^\circ \sim \tan 15^\circ$,
 超楕円(4乗和)制限) (図18, 20 と比較されたい)

楕円制限は $m = n = 2$ の場合に相当し、矩形制限は $m = n = \infty$ の場合に相当する。

3.4.2 円弧と直線の組み合わせ

超楕円制限や更に複雑な形状の代わりに、円弧と直線を組み合わせて平面 λ に可動領域を設定することも可能である。可動領域を超えた値を修正する際に、超楕円制限では、最適解を代数的に求めることができないが、円弧と直線の組み合わせによる領域形状ならば可能である。

4. 可動領域を超えた場合の修正方法

関節の曲げ状態が、設定された可動領域を超えた場合には、これを可動領域内に戻すための修正が必要となる。この修正方法について考える。

4.1 球面垂線と最適解

球面 S 上に可動領域 A が設定され、領域 A 外の点 P が与えられたとき、 P の位置を領域 A 内(境界を含む)に修正した点を P_m とする。領域 A 内の点のうち、 P からの距離(球面 S 上での距離)が最小となる点を P_m とするのが最良であると考えられる。この条件を満たす P_m を最適解と呼ぶことにする。

ここで、便宜上「球面垂線」という用語を次のように定義する。

球面上において点 P と曲線 L が与えられたとき、 P を通り L に直交する大円を、 P から L に下ろした球面垂線と呼び、 L と球面垂線との交点を球面垂線の足とする。

図22 のように、 P_m の最適解は、 P から可動領域境界に下ろした球面垂線の足である。ただし、矩形制限のように領域形状が頂点を持つ場合には、この頂点が最適解になることがある。

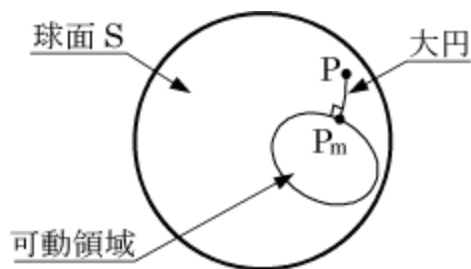


図22: P から可動領域境界に下ろした球面垂線の足 P_m

4.2 射影 f の特徴

球面 S から平面 λ への射影 f には、次のような特徴がある。

- 2本の線が交わる角度は、射影 f によって変わらない(f は等角写像)。
- S上の円は、 λ 上の円または直線に射影され、その逆も成り立つ。両者の詳細な対応関係は下表のようになる。

	球面 S	平面 λ
大円	極 P_0 を通る	直線(原点(0, 0)を通る)
	極 P_0 を通らない	円(条件 C_1 を満たす)
小円	極 P_0 を通る	直線(原点(0, 0)を通らない)
	極 P_0 を通らない	円(条件 C_1 を満たさない)

条件 C_1 とは、図23のように円の半径を r 、原点(0, 0)から円の中心までの距離を d とするとき、次式が成立することである。

$$d^2 = r^2 - 1 \quad (10)$$

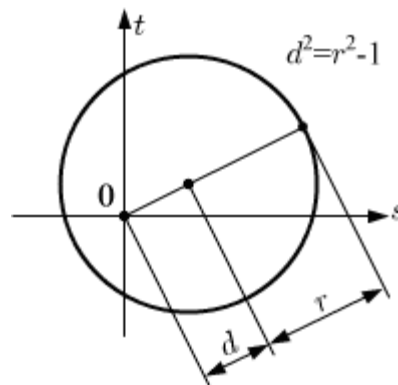


図23: 条件 C_1 (平面 λ の円が球面 S 上で大円となる条件)

したがって、球面 S 上で P から可動領域境界に下ろした球面垂線は、平面 λ 上では次のいずれかになる。

- 可動領域境界に直交する円(条件 C_1 を満たす)
- 可動領域境界に直交する直線(原点(0, 0)を通る)

この性質を利用すれば、可動領域の形状によっては、 P_m の最適解を求めることが可能となる。

4.3 矩形制限

4.3.1 矩形制限に対する最適解

矩形制限では、平面 λ 上に図16に示すような長方形の可動領域が設定される。まず、球面 S 上で、可動領域の1辺(例として $s = s_0$ に相当する辺)に P から球面垂線 PP_f を下ろすことを考える。 $f(P)$ の座標を (s_p, t_p) とする。 $f(P)$ は P を平面 λ 上に射影した点である。))

$t_p \neq 0$ の場合には、球面垂線 PP_f を求めることは、平面 λ 上で次の3条件を満たす円を求めることに相当する。

- 点 $f(P)$ を通る。
- 直線 $s = s_0$ に直交する。
- 式(10)を満たす。

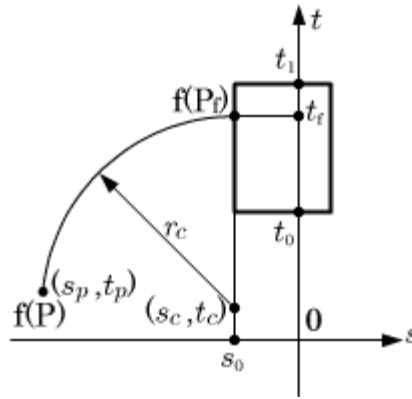


図24: 球面垂線を平面λに射影して得られる円

図24のように、求める円の中心座標を (s_c, t_c) 、半径を r_c とすると、これらは次式で得られる。

$$\begin{aligned}
 s_c &= s_0 \\
 t_c &= (s_p^2 + t_p^2 - 2s_0s_p - 1) / (2t_p) \\
 r_c^2 &= s_0^2 + t_c^2 + 1
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

点 $f(P_f)$ は、この円と直線 $s = s_0$ との交点である。 $f(P_f)$ の座標を (s_f, t_f) とする(必然的に $s_f = s_0$ である)。 $t_0 \leq t_f \leq t_1$ であれば、可動領域の辺に対して球面垂線を下ろせたことになる。ただし、図25のように球面垂線は必ずしもその辺への最短距離とはならない。点 P_a から辺 $B_1 B_2$ に下ろした球面垂線 $P_a P_f$ は、 P_a から $B_1 B_2$ への最短距離である。しかし、 P_b から $B_1 B_2$ への最短距離は、球面垂線 $P_b P_f$ ではなく大円 $P_b B_2$ である。

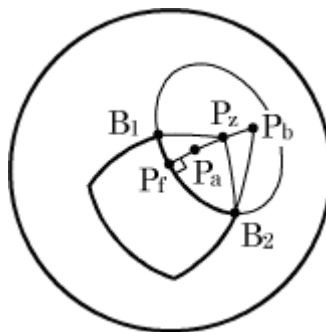


図25: 矩形領域の辺に下ろした球面垂線

ここで、辺 $B_1 B_2$ (小円 $B_1 B_2$) の球面上の中心を P_z とする。球面上の点 P から辺 $B_1 B_2$ に下ろした球面垂線が $B_1 B_2$ への最短距離となるのは、点 P が領域 $P_z B_1 B_2$ の内部に位置する場合のみである。また、点 P が領域 $P_z B_1 B_2$ の内部にあれば、必ず P から $B_1 B_2$ に球面垂線を下ろすことができる。領域 $P_z B_1 B_2$ を辺 $B_1 B_2$ の最近点領域と呼ぶことにする。平面λ上での、可動領域の4辺に対する最近点領域の例を図26に示す。

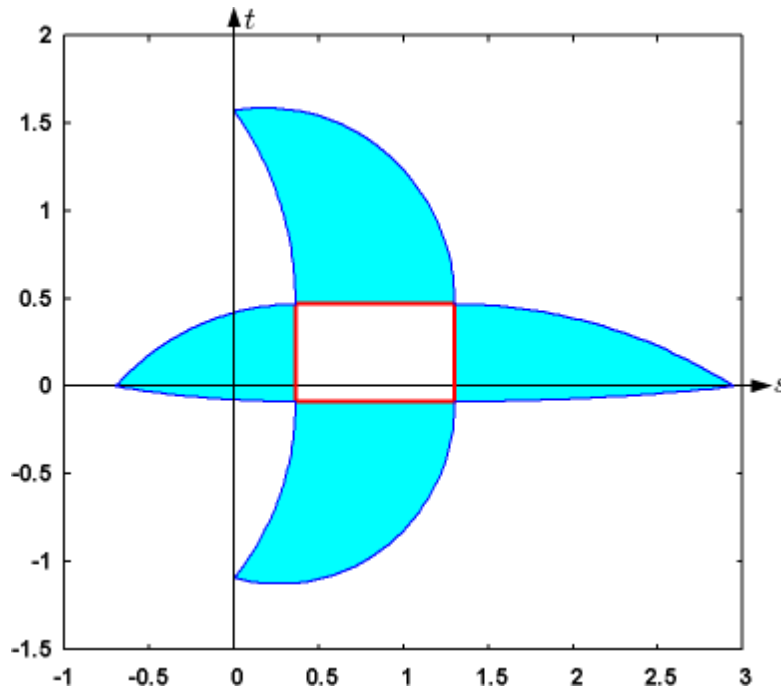


図26: 矩形領域の各辺に対する最近点領域 (■色の領域)

$f(P)$ の t 座標は $t_f = t_c \pm r_c$ となるが、複号士のうち有効となるのは t_p の正負と同じものだけである。そうでなければ $f(P)$ は最近点領域外となるからである。この有効な t_f が $t_0 \leq t_f \leq t_1$ であれば、 P_f を最適解としてよい。

$t_p = 0$ の場合は、球面垂線 PP_f の平面 λ への射影(の延長)は、 $f(P)$ と原点 $(0, 0)$ を結ぶ直線になる。したがって、 $t_0 \leq 0 \leq t_1$ であれば、球面垂線を下ろせたことになる。さらに $s_0 - (s_0^2 + 1)^{1/2} \leq s_p \leq s_0$ の場合に限り、 P が最近点領域に含まれ、この球面垂線の足 ($s_f = s_0, t_f = 0$) が最適解となる。この判定式は次のように書き換えることができる。

$$s_p(s_p - 2s_0) \leq 1 \quad \text{AND} \quad s_p \leq s_0 \tag{12}$$

$s = s_1$ の辺を対象とする場合には、上記判定式 (式(12)) は次式の形になる。

$$s_p(s_p - 2s_1) \leq 1 \quad \text{AND} \quad s_p \geq s_1 \tag{13}$$

$f(P)$ が4辺の最近点領域のいずれにも含まれない場合は、 P から可動領域境界に対して球面垂線を下ろせないことを意味する。この場合、最適解 P_m は可動領域の4頂点のいずれかになる。球面上で P と4頂点との距離を求め、これが最小となる頂点が最適解である。

4.3.2 矩形制限に対する簡易解

矩形制限における修正方法には、以下に述べるような簡易解が考えられる。これは、平面 λ 上で、 $f(P)$ からの距離が最小となるような可動領域内の点を解とする方法である。 $f(P)$ の s 座標を s_p とし、修正後の s 座標を s_m とすると、次式ようになる。

$$\begin{aligned} s_m &= s_0 & (s_p < s_0) \\ s_m &= s_p & (s_0 \leq s_p \leq s_1) \\ s_m &= s_1 & (s_1 < s_p) \end{aligned} \tag{14}$$

t 座標についても同様である。

ただし、この簡易解が近似解として使えるのは、可動領域が狭い (s_0, s_1, t_0, t_1 の絶対値が小さい) 場合または修正量が小さい場合に限られる。この条件に該当しない場合には、図27 に示すように不具合を生じる。 P_a に対する最適解が P_{ma} であるのに対して、簡易解は P'_{ma} となる。また、 P_b に対する最適解が P_{mb} であるのに対して、簡易解は球面の反対側から回って P'_{mb} となる。

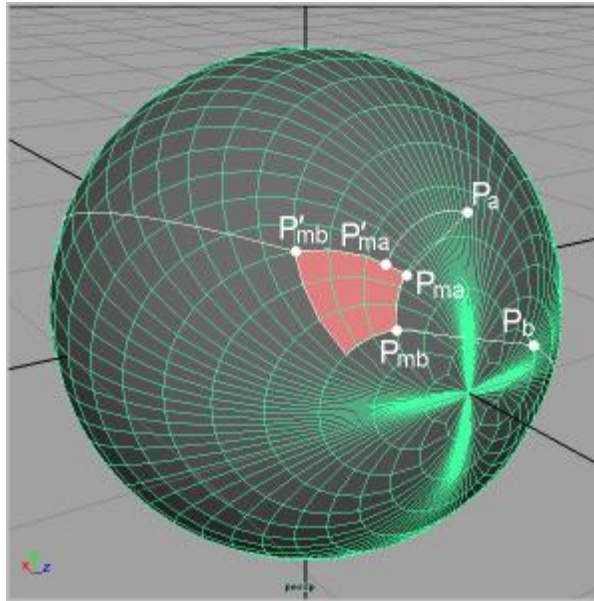


図27: 矩形制限における簡易解修正の不具合

4.4 楕円制限

楕円制限の場合、最適解を求めることは、平面 λ 上で楕円に直交する円を求めることに相当する。しかし、その解を求める式は高次方程式となり、代数的に解くことができない。

近似解として、平面 λ 上で楕円に下ろした垂線の足を解とする方法が考えられる。この場合、解くべき式は 4 次方程式となり代数的に解を得ることが可能となる。数式処理ソフト等を用いれば、実際に解の式が得られるが、非常に複雑な式となり実用的ではない。なお、類似の問題として、楕円体への垂線を求める方法が文献[1] に記されている。

そこで、解としては全く不正確であるが、図28 に示すように、 $f(P)$ を楕円の中心に向かって修正し簡易解 $f(P_m)$ を得る方法が考えられる。

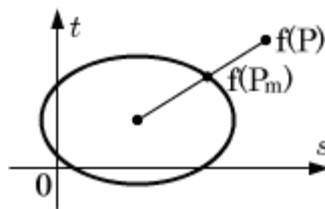


図28: 楕円制限に対する簡易解

点 $f(P_m)$ の座標 (s_m, t_m) は次式のように容易に求められる。ただし、 s_a, s_b, t_a, t_b は式(8) のとおりである。

$$\begin{aligned}
 k_s &= (s_p - s_b) / s_a \\
 k_t &= (t_p - t_b) / t_a \\
 k_m &= 1 / (k_s^2 + k_t^2)^{1/2} \\
 s_m &= k_s k_m s_a + s_b \\
 t_m &= k_t k_m t_a + t_b
 \end{aligned} \tag{15}$$

楕円制限の簡易解は一般的には全く不正確であるが、 $s_0 = -s_1 = t_0 = -t_1$ の場合には、可動領域が x 軸を中心とする円になるので最適解に一致する。そのため、可動領域がこの条件に合う場合、あるいはこの条件に近い場合には、簡易解を用いても問題はない。

逆に、簡易解が明確に不具合を生じるのは、次のような場合である。3次元空間での関節の可動領域を模式的に図29のように表し、関節は図の下方向に外力(重力等)を受けているものとする。この場合関節は A_0 の位置(最も低い位置)に落ち着くべきであるが、簡易解を用いて修正を行なうと A_n の位置になる。例えば、一旦 A_0 の位置にあったとしても、外力により A_0' に移動、簡易解 A_1 に修正、外力により A_1' に移動、簡易解 A_2 に修正、という段階を経て、最終的に A_n の位置に落ち着く。

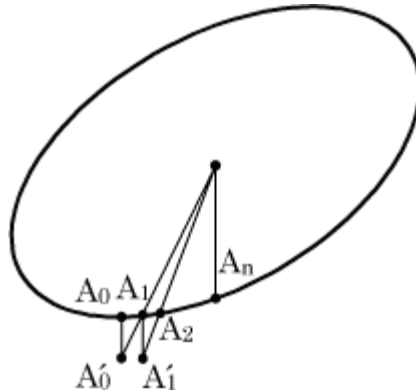


図29: 楕円制限における簡易解修正の不具合

4.5 小判型制限

小判型制限では、平面 λ 上に図19 に示すような形状の可動領域が設定される。可動領域境界の直線部を「辺」、半円部を「弧」と呼ぶことにする。また、これらを球面 S に射影したのも同様の呼び方とする。弧の中心座標を (s_e, t_e) 、半径を r_e とする。 $s_a \leq t_a$ (可動領域形状が平面 λ 上で縦長) の場合には、次式のようになる。

$$\begin{aligned} r_e &= (s_1 - s_0) / 2 = s_a \\ s_e &= (s_1 + s_0) / 2 = s_b \\ t_e &= t_0 + r_e, \quad t_1 - r_e \end{aligned} \quad (16)$$

t_e の 2つの値は、順に下側および上側の弧に対するものである。 $s_a \geq t_a$ (可動領域形状が横長) の場合には、次式のようになる。

$$\begin{aligned} r_e &= (t_1 - t_0) / 2 = t_a \\ t_e &= (t_1 + t_0) / 2 = t_b \\ s_e &= s_0 + r_e, \quad s_1 - r_e \end{aligned} \quad (17)$$

s_e の 2つの値は、順に左側および右側の弧に対するものである。

以下の例では $s_a \leq t_a$ の場合を扱う。まず、球面 S 上で、可動領域境界の辺に P から球面垂線 PP_f を下ろすことを考える。これは、矩形制限領域の 1辺に球面垂線を下ろす場合と全く同じである。したがって、球面垂線が下ろせるかどうか、下ろした球面垂線が可動領域への最短距離になるかどうかは、矩形制限の場合と同様の方法で判定できる。可動領域の 2辺の上に最適解が存在しない場合は、可動領域の弧に下ろした球面垂線の足 P_f が最適解となる。2本の弧に対して P_f を求め、球面上での P との距離が最小となるものを最適解とする。

以下、可動領域の 2本の弧のうち下側の弧を例にとって、球面垂線の足を求める方法を述べる。前述(4.2 射影 f の特徴)のように、球面 S 上の大円は平面 λ 上では円または直線になる。

まず、球面垂線 PP_f が平面 λ 上で円になる場合を考える。この球面垂線を求めることは、平面 λ 上で次の 3条件を満たす円を求めることに相当する。

- 点 $f(P)$ を通る。
- 可動領域の弧に直交する。
- 式(10)を満たす。

求める円の中心座標を (s_c, t_c) , 半径を r_c とする。 $f(P)$ の座標 (s_p, t_p) は以下の手順で求めることができる。まず、次式により s_c, t_c を求める。

$$\begin{aligned} k_0 &= s_p^2 + t_p^2 - 1 \\ k_1 &= s_e^2 + t_e^2 - r_e^2 - 1 \\ k_2 &= 2(s_e t_p - s_p t_e) \\ s_c &= -(k_0 t_e - k_1 t_p) / k_2 \\ t_c &= (k_0 s_e - k_1 s_p) / k_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$k_2 = 0$ となるのは、 $f(P)$, 弧の中心 (s_e, t_e) , 原点 $(0, 0)$ の 3 点が一直線上に存在する場合で、これは球面垂線 PP_f が平面 λ 上で直線になる場合である。したがって、ここでは $k_2 \neq 0$ としてよい。次式により r_c を求める。

$$\begin{aligned} s_g &= s_c - s_e \\ t_g &= t_c - t_e \\ l_g &= s_g^2 + t_g^2 \\ r_c &= (l_g - r_e^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

次式により k_4 を求める。

$$k_4 = t_g r_e \pm s_g r_c \quad (20)$$

ここで

$$k_4 \leq 0 \quad (21)$$

の場合のみ、次式の s_p, t_p が有効となる。 $k_4 > 0$ の場合は、弧ではなくその延長（可動領域の内部）に球面垂線を下ろすことを意味するので、解として無効である。

$$\begin{aligned} s_f &= s_e + (s_g r_e \pm t_g r_c) r_e / l_g \\ t_f &= t_e + k_4 r_e / l_g \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、式(20), (22) は複号同順である。また、条件 $k_4 \leq 0$ は、式(20) の複号の両方に対して同時に成り立つ場合があるので注意が必要である。これは、可動領域の一方の弧に対して P から 2本の球面垂線が下ろせることを意味する。平面 λ 上では可動領域の弧は半円(中心角 180°)であるが、球面 S 上では中心角が 180° を超えることがあるので、2本の球面垂線が存在し得る。

以上の説明は、可動領域の下側の弧に球面垂線を下ろす場合である。上側の弧の場合には、式(21) が $k_4 \geq 0$ となる。

次に、球面垂線 PP_f が平面 λ 上で直線になる場合を考える。これは、式(18) で $k_2 = 0$ となる場合である。この球面垂線を求めることは、平面 λ 上で次の 3条件を満たす直線を求めることに相当する。

- 点 $f(P)$ を通る。
- 可動領域の弧に直交する。(これは点 (s_e, t_e) を通ることと同値である)
- 原点 $(0, 0)$ を通る。

解 s_p, t_p は次式により得られる。ただし、複号 \pm のうち有効となるのは、上側の弧の場合には t_h の正負と同じもの、下側の弧の場合には t_h の正負と反対のものだけである。そうでなければ、弧ではなくその延長(可動領域の内部)に球面垂線を下ろすことを意味するので、解として無効である。

$$\begin{aligned}
 s_h &= s_p - s_e \\
 t_h &= t_p - t_e \\
 k_5 &= (s_h^2 + t_h^2)^{1/2} \\
 s_f &= s_e \pm s_h r_e / k_5 \\
 t_f &= t_e \pm t_h r_e / k_5
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

4.6 その他の制限方法

4.6.1 超楕円制限

超楕円制限の場合は、楕円制限の場合と同様に、最適解を求めるには高次方程式を解くことが必要となり、現実的ではない。楕円制限における簡易解と同様に、平面 λ 上で超楕円の中心に向かって修正すれば、簡易解を得ることができる。ただし、楕円制限とは異なり、 $s_0 = -s_1 = t_0 = -t_1$ の場合でも、簡易解は最適解に一致しないので注意を要する。

4.6.2 円弧と直線の組み合わせ

超楕円制限の代わりに、図30のように円弧と直線の組み合わせで可動領域を設定すれば、小判型制限とほぼ同様の方法により最適解を求めることができる。

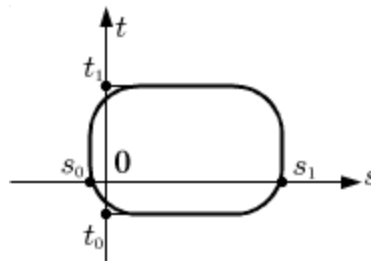


図30: 円弧と直線の組み合わせによる可動領域設定

5. 捻り角の扱い

5.1 捻り角の定義

既に述べたように、関節の曲げ状態は、球面 S 上の点 P の位置で表すことができる。これに対して捻りは、軸 OP 回りの回転として表される(O は球面 S の中心)。捻り角を扱うには、曲げ状態が与えられたとき、その曲げ状態における捻り角 θ の向きを定義する必要がある。

まず、親骨と子骨の座標軸の向きが一致(3軸とも一致)している状態を基準状態とし、この状態の捻り角を 0 と定義する。これは、曲げ P_1 における捻り角 0 状態である。(P_1 は座標 $(1, 0, 0)$ の点。図8 参照。)

次に、以下のように「単純回転」を定義する。

始点を共有する任意の単位ベクトル v_1, v_2 に対して、次の条件を満たす回転を、 v_1 から v_2 への単純回転と定める。

- v_1, v_2 のなす平面に垂直な軸の回りの回転。
- 回転により v_1 は v_2 に一致する。

$v_1 = v_2$ の場合は無回転とする(回転マトリクスで表すと単位行列)。

$v_1 = -v_2$ の場合は定義不能とする。

基準状態に OP_1 から OP への単純回転を施した状態を、曲げ P における捻り角 θ 状態と定義する。捻り角 θ 状態の子骨の y 軸、 z 軸の向きは、図9のグリッドと同じ向きになる。 $P = P_0$ の場合は、捻り角 θ の向きは定義不能である。

以上のように関節の捻り角を定義すると、関節の回転マトリクス M は、次のように曲げマトリクス M_b と捻りマトリクス M_t とに分解できる。ただし、マトリクスのタイプ(掛ける順序、要素の並び等)は、列ベクトルを掛けるタイプとする。

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$M = M_b M_t \quad (25)$$

$$M_b = \begin{bmatrix} m_{00} & -m_{10} & -m_{20} \\ m_{10} & m_{00} + m_{20}^2 d_0 & -m_{10} m_{20} d_0 \\ m_{20} & -m_{10} m_{20} d_0 & m_{00} + m_{10}^2 d_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$M_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (m_{11} + m_{22}) d_0 & (m_{12} - m_{21}) d_0 \\ 0 & (m_{21} - m_{12}) d_0 & (m_{11} + m_{22}) d_0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ただし,

$$d_0 = (1 - m_{00}) / (m_{10}^2 + m_{20}^2) \quad (28)$$

である。式(28)は $d_0 = 1 / (m_{00} + 1)$ としても等価であるが、 $m_{00} \doteq -1$ ($P \doteq P_0$ に相当)の場合の桁落ちを避けるためには式(28)を用いるほうが良い。

5.2 捻り角の0固定

関節の曲げを可動範囲内に修正し、関節の捻り角は常に0とする場合について考える。与えられた関節の回転状態を表すマトリクスを式(24)の M とし、これを可動範囲内に修正した結果を M_1 とする。

与えられた曲げ状態を表す球面 S 上の点を P とすると、 P の座標 (x, y, z) は次式で得られる。

$$\begin{aligned} x &= m_{00} \\ y &= m_{10} \\ z &= m_{20} \end{aligned} \quad (29)$$

この P を前述の方法により可動領域内に修正する。修正結果を P_m とし、その座標を (x_m, y_m, z_m) とする。 M_1 は次式により得られる。

$$M_1 = \begin{bmatrix} x_m & -y_m & -z_m \\ y_m & x_m + z_m^2 d_1 & -y_m z_m d_1 \\ z_m & -y_m z_m d_1 & x_m + y_m^2 d_1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$d_1 = (1 - x_m) / (y_m^2 + z_m^2) \quad (31)$$

点 $f(P_m)$ の st 座標 (s_m, t_m) を使って M_1 を表すと次式のようになる

$$M_1 = \begin{bmatrix} d_2 - 1 & -t_m d_2 & s_m d_2 \\ t_m d_2 & (s_m^2 + 1) d_2 - 1 & s_m t_m d_2 \\ -s_m d_2 & s_m t_m d_2 & (t_m^2 + 1) d_2 - 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$d_2 = 2 / (s_m^2 + t_m^2 + 1) \quad (33)$$

この式を使えば、平面λ上での曲げ修正後、 P_m の座標を介することなく直接 M_1 を求められるので、計算量を減らすことができる。

5.3 捻り角可動範囲の設定

関節の曲げ捻りともに、設定された可動範囲内に修正する場合について考える。与えられた関節の回転状態を表すマトリクスを式(24)の M とし、これを可動範囲内に修正した結果を M_2 とする。

M は、式(25), (26), (27), (28) のように、曲げと捻りに分解できる。曲げについては、式(29), (30), (31) を使って修正される。

修正前の捻り角を ψ とすると、 ψ は次式から求めることができる。

$$\begin{aligned} \cos \psi &= (m_{11} + m_{22}) d_0 \\ \sin \psi &= (m_{21} - m_{12}) d_0 \end{aligned} \quad (34)$$

ψ が可動範囲外の場合は、これを修正し ψ_m とする。 ψ_m による捻りマトリクス M_{t2} は次式のようになる。

$$M_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_m & -\sin \psi_m \\ 0 & \sin \psi_m & \cos \psi_m \end{bmatrix} \quad (35)$$

M_2 は次式により得られる。

$$M_2 = M_1 M_{t2} \quad (36)$$

6. 四元数

6.1 曲げ捻りの分解

関節の回転を表すのに四元数を用いる場合について考える。前述のマトリクスを使う場合と同様に、四元数も曲げと捻りに分解できる。関節の回転を表す四元数 q は、次のように曲げ四元数 q_b と捻り四元数 q_t とに分解される。

$$q = q_b q_t \quad (37)$$

q の要素を (q_x, q_y, q_z, q_w) とすると、曲げ四元数 q_b の要素 $(q_{bx}, q_{by}, q_{bz}, q_{bw})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} q_{bx} &= 0 \\ q_{by} &= (q_y q_w - q_x q_z) / (q_x^2 + q_w^2)^{1/2} \\ q_{bz} &= (q_x q_y + q_z q_w) / (q_x^2 + q_w^2)^{1/2} \\ q_{bw} &= (q_x^2 + q_w^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (38)$$

捻り四元数 q_t の要素 $(q_{tx}, q_{ty}, q_{tz}, q_{tw})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q_{tx} &= q_x / (q_x^2 + q_w^2)^{1/2} \\
 q_{ty} &= 0 \\
 q_{tz} &= 0 \\
 q_{tw} &= q_w / (q_x^2 + q_w^2)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

6.2 曲げと捻りの修正

与えられた曲げ状態を表す球面S上の点をPとすると、Pの座標(x, y, z)は次式で得られる。

$$\begin{aligned}
 x &= 2(q_x^2 + q_w^2) - 1 \\
 y &= 2(q_x q_y + q_z q_w) \\
 z &= 2(q_x q_z - q_y q_w)
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

このPを前述の方法により可動領域内に修正する。修正結果をP_mとし、その座標を(x_m, y_m, z_m)とする。修正後の曲げ四元数q₁ = (q_{1x}, q_{1y}, q_{1z}, q_{1w})は次式により得られる。

$$\begin{aligned}
 q_{1x} &= 0 \\
 q_{1y} &= -z_m / [2(1 + x_m)]^{1/2} \\
 q_{1z} &= y_m / [2(1 + x_m)]^{1/2} \\
 q_{1w} &= [(1 + x_m) / 2]^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

x, y, zを使わずs, tを使って表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 s &= (q_y q_w - q_x q_z) / (q_x^2 + q_w^2) \\
 t &= (q_x q_y + q_z q_w) / (q_x^2 + q_w^2)
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 q_{1x} &= 0 \\
 q_{1y} &= s_m / (s_m^2 + t_m^2 + 1)^{1/2} \\
 q_{1z} &= t_m / (s_m^2 + t_m^2 + 1)^{1/2} \\
 q_{1w} &= 1 / (s_m^2 + t_m^2 + 1)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

修正前の捻り角をψとすると、ψは次式から求めることができる。

$$\begin{aligned}
 \cos(\psi / 2) &= q_w / (q_x^2 + q_w^2)^{1/2} \\
 \sin(\psi / 2) &= q_x / (q_x^2 + q_w^2)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

ψが可動範囲外の場合は、これを修正しψ_mとする。ψ_mによる捻り四元数q₂ = (q_{2x}, q_{2y}, q_{2z}, q_{2w})は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 q_{2x} &= \sin(\psi_m / 2) \\
 q_{2y} &= 0 \\
 q_{2z} &= 0 \\
 q_{2w} &= \cos(\psi_m / 2)
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

曲げ捻りとも修正された四元数q₃は次式により得られる。

$$q_3 = q_1 q_2
 \tag{46}$$

6.3 四元数を使った曲げ角度制限

式(38)の四元数は関節の曲げを表すので、その要素 q_{by} , q_{bz} に可動範囲を設定することによって、曲げ角度を制限する方法が考えられる。しかし、以下に述べるように、この方法には射影を使う方法に比べて劣る点がある。

$q_{by} = \sin(\eta / 2)$, $q_{bz} = \sin(\zeta / 2)$ とし、 η , ζ の値を -180° から 180° まで 10° 間隔で変えて球面 S 上にグリッド(格子線)を作ると、図31 のようになる。ただし q_{by} , q_{bz} の範囲は、 $q_{by}^2 + q_{bz}^2 \leq 1$ である。

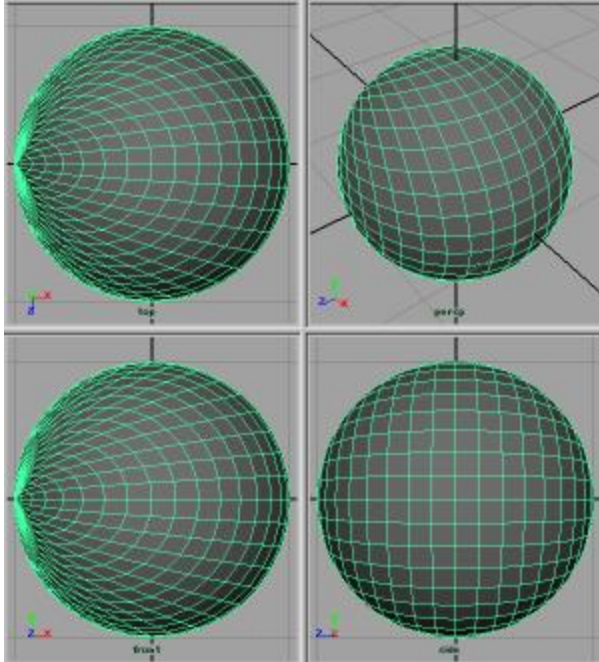


図31: q_{by} , q_{bz} の値を変えて球面 S 上に作ったグリッド (図9 と比較されたい)

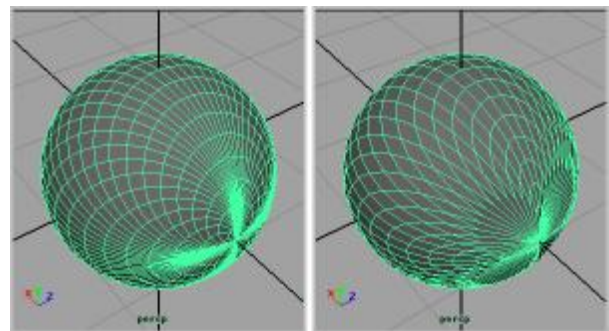


図32: 射影方式(左)と四元数(q_{by} , q_{bz})方式(右)の極側の比較

図31 と図9 (射影方式)とを比較すると、曲げ角が小さい領域では、両者は似た形状となっている。しかし、射影方式ではグリッドが直交しているのに対して、 q_{by} , q_{bz} による角度制限ではグリッドが直交しない。特に極側の半球では、図32 のように、四元数 (q_{by} , q_{bz})による角度制限ではグリッドの交角が直角から大きく離れた状態になり、可動領域設定には適さない。

ただし、 x 軸に関して軸対称な円形の可動領域を設定する場合には、 q_{by} , q_{bz} を 2乗和制限とすることで、可動領域を正確に設定することができる。

7. まとめ

球面 S から平面 λ への射影を使うことにより、特異点を1個に減らし、広い可動範囲の設定を可能にした。また、ユーザが可動範囲を指定する際には、平面 λ 上の直交座標(s , t)を直接扱うのではなく、式(5)を使って r_y , r_z と対応づけることにより、従来手法からの移行が容易になる。

本手法は、鉄拳6の揺れ物(髪、鎖等)に使用され効果を上げた。しかし、本手法の用途は揺れ物に限定されるものではなく、一般の骨格構造にも適用可能である。人型の骨格構造(ラグドール)や、モーション作成時のキャラクターの関節制御への適用が考えられる。

8. 参考文献

- [1] John C. Hart. Distance to an Ellipsoid. Graphics Gems IV, pp113-119. Academic Press Inc., 1994.